Beispiele für Partialbruchzerlegungen, bei denen der Nenner ***nicht*** in ein Produkt aus lauter unterschiedlichen Linearfaktoren zerfällt

1) Lauter Linearfaktoren, aber einer kommt mehrfach vor:

Beispiel: $\frac{1}{x^2\,(x-1)}$

Hier klappt der naheliegende Ansatz $\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x-1}$ leider nicht! Stattdessen:

a) Entweder setzt man eine Summe an, die *beide* mögliche Potenzen von x enthält, also

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}\,.$$

Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt

$$1 = A\,x\,(x-1) + B\,(x-1) + C\,x^2.$$

Setzt man einfach nur die Definitionslücken x = 0 und x = 1 ein, so erhält man zwar B und C, aber nicht A. Stattdessen multipliziert man erst mal aus und fasst zusammen:

$$1 = (A + C)\,x^2 + (B - A)\,x - B$$

Damit dass für alle x gilt, müssen jeweils die Koeffizienten der Potenzen von x auf beiden Seiten übereinstimmen („Koeffizientenvergleich"). Man erhält also die drei Gleichungen $A + C = 0$, $B - A = 0$ und $-B = 1$, aus denen leicht folgt: $A = -1$, $B = -1$, $C = 1$ und damit

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,.$$

b) Oder man setzt eine Summe nur mit den beiden Nennern an, deren Zähler aber so allgemein wie möglich gewählt werden, sodass man noch ***echt*** gebrochenrationale Terme hat: Alle Zähler enthalten ganzrationale Funktionen, deren Grad um eins kleiner ist als der jeweilige Nennergrad, also

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x-1}\,.$$

Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt:

$$1 = (Ax + B)\,(x-1) + C\,x^2.$$

Wieder erhält man durch Einsetzen der Definitionslücken nur B und C, aber nicht A. Wieder multipliziert man aus und fasst zusammen:

$$1 = (A + C)\,x^2 + (B - A)\,x - B$$

Der Rest klappt wie in (a), man erhält also schließlich

$$\frac{1}{x^2\,(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2}\,.$$

2) Außer linearen Faktoren auch (nicht zerlegbare!) quadratische Faktoren:

Beispiel: $\frac{1}{x\,(x^2+1)}$

Wieder klappt der einfache, naheliegende Ansatz $\frac{1}{x\,(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}$ nicht. Stattdessen muss man vorgehen wie in 1(b): Man setzt eine Summe mit den beiden Nennern an und wählt die Zähler als ganzrationale Funktionen, deren Grad jeweils um eins kleiner ist als der Nennergrad,

$$\frac{1}{x\,(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Durchmultiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt

$$1 = A\,(x^2 + 1) + (Bx + C)\,x.$$

Hier haben wir nur eine Definitionslücke, $x = 0$. Setzen wir diese ein, so erhalten wir zwar A, aber nicht B und C. Also wieder: Ausmultiplizieren und Zusammenfassen,

$$1 = (A + B)\,x^2 + C\,x + A$$

Koeffizientenvergleich führt auf die drei Gleichungen $A + B = 0$, $C = 0$ und $A = 1$, woraus $B = -1$ folgt und damit

$$\frac{1}{x\,(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$