Weitere (mehr oder weniger) wichtige Funktionen

Wer meint, dass man in der FOS 13 Technik schon alle Funktionen kennengelernt hätte, die es gibt (oder auch nur alle wichtigen), der/die täuscht sich leider gewaltig… Hier mal eine kleine Auswahl von Funktionen, denen man im Studium (Mathematik, Physik, Ingenieurswissenschaften, Informatik, …) noch begegnen könnte.

- Legendre-, Laguerre- und Hermite-Polynome: Das sind spezielle Klassen von ganzrationalen Funktionen, die in vielen Anwendungen auftauchen, z. B. bei der Berechnung von Gravitationskräften oder elektrischen Kräften bei unregelmäßig geformten Körpern oder bei der Berechnung von möglichen Energien von Atomen oder schwingenden Systemen in der Quantenmechanik.
- Hyperbelfunktionen: Sinus hyperbolicus sinh(x), Cosinus hyperbolicus cosh(x), Tangens hyperbolicus tanh(x)
  Diese Funktionen sind ähnlich definiert wie sin, cos, tan, allerdings statt am Einheitskreis ($x^2 + y^2 = 1$) an der Einheitshyperbel ($x^2 - y^2 = 1$). Sie haben viele ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen. Man benötigt sie öfters in physikalisch-technischen Anwendungen, z. B. beschreibt der cosh die Form einer/s durchhängenden Kette / Kabels.
  Außerdem gibt es dazu auch noch die Umkehrfunktionen: Areasinus hyperbolicus arsinh(x) und entsprechend arcosh(x), artanh(x). Im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen kann man die Hyperbelfunktionen aber durch andere, einfachere Funktionen ausdrücken:
  $$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
  $$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right); \quad \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right);$$
  $$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Alle bisherigen Funktionen nennt man oft auch „elementare Funktionen“. Alle folgenden Funktionen kann man dagegen **nicht** mehr durch diese einfacheren Funktionen ausdrücken! Sie werden öfters auch als „spezielle Funktionen“ bezeichnet.

- Die Lambert‘sche W-Funktion ist definiert als die Umkehrfunktion zu $f(x) = x \cdot e^x$. Wird angeblich oft gebraucht, ist aber zumindest mir im Studium nie begegnet. (Kommt z. B. vor, wenn man beim schiefen Wurf den Luftwiderstand berücksichtigt [1], oder beim Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke bei einer Diode [2], oder auch bei der Berechnung der Konstanten im Wien'schen Verschiebungsgesetz für die Abstrahlung eines „schwarzen Körpers“ [3].)

- Die Gamma- und Beta-Funktion sind beide jeweils über ein Integral definiert, das jeweils von einem bzw. zwei Parametern abhängt:
  $$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt; \quad \mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$
  Für natürliche Argumente kann man die Funktionswerte jeweils angeben:
  $$\Gamma(k) = (k-1)!; \quad \mathrm{B}(m,n) = \frac{(n-1)!\cdot(m-1)!}{(n+m-1)!} \quad \text{für} \quad k,m,n \in \mathbb{N}$$
  Für beide Funktionen gibt es jeweils noch zahlreiche andere Darstellungsmöglichkeiten, z. B.:
  $$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(t)\cos^{2y-1}(t)\, dt$$
  Außerdem gibt es noch die Digamma- bzw. allgemeiner die Polygamma-Funktionen, geschrieben $\psi(x)$ bzw. $\psi_n(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$; dies sind die Ableitungen des natürlichen Logarithmus der Gamma-Funktion. Wichtig sind die Funktionen z. B. in der statistischen Mechanik / Thermodynamik.

- Die sogenannte elliptischen Funktion bzw. das elliptische Integral 2. Art benötigt man beispielsweise, um den Umfang einer Ellipse zu berechnen ($u = 4a \cdot E(k)$, wobei $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ die sogenannte Exzentrizität der Ellipse ist und a, b ihre große bzw. kleine Halbachse). Außerdem gibt es noch die elliptischen Funktionen bzw. Integrale 1. und 3. Art, die zwar nicht direkt etwas mit Ellipsen zu tun haben, aber trotzdem wegen ihrer Ähnlichkeit zur Funktion 2. Art so benannt wurden. Sie tauchen auch an vielen anderen Stellen auf, z. B. gibt das Integral 1. Art die Bogenlänge einer anderen mathematischen Kurve, der „Lemniskate'', an; wichtig sind sie aber z. B. auch beim Fadenpendel [4].
  Auch sie sind, wie die Gamma- und Beta-Funktion, über Integrale definieren, die von einem oder zwei Parametern abhängen:
  1. Art: $K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$
  2. Art: $E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt$
  3. Art: $\Pi(n, k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$
- Die (Riemann'sche) Zeta-Funktion und die (Dirichlet'sche) Eta-Funktion sind vor allem in der reinen Mathematik wichtig, insbesondere in der Zahlentheorie (darin geht es vor allem um Primzahlen – die sind aber auch in der Kryptographie wichtig, also in der Informatik!). Auch sie tauchen aber beispielsweise in der statistischen Mechanik / Thermodynamik auf. Ihre grundlegende Definition läuft über unendliche Summen („Reihen''):
  $$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}; \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$
  Auch bei diesen beiden Funktionen gibt es zahlreiche andere Darstellungen, z. B. die folgenden Integraldarstellungen mit Parameter, die eben in der statistischen Mechanik wichtig sind (z. B. bei der sogenannten Bose-Einstein-Kondensation, aber auch beim Verhalten von Metallen):
  $$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt; \quad \eta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} dt$$
- Eine weitere Klasse von Funktionen, die über Reihen definiert sind, sind die sogenannten Polylogarithmus-Funktionen:
  $$Li_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^r}$$
  mit $r \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Der Name stammt daher, dass man im Spezialfall $r = 1$ eine Logarithmus-Funktion erhält:
  $$Li_1(x) = -\ln(1 - x),$$
  für $r = 2$ bzw. $r = 3$ spricht man dann vom Dilogarithmus bzw. Trilogarithmus. Für alle nicht positiven ganzzahligen Werte von r ergeben sich dagegen gebrochenrationale Funktionen. Es bestehen die Zusammenhänge
  $$Li_r'(x) = \frac{1}{x} Li_{r-1}(x) \quad \text{bzw.} \quad Li_r(x) = \int_0^x \frac{Li_{r-1}(t)}{t} dt.$$
  Die Funktionen treten wohl vor allem bei der Berechnung diverser Integrale auf, die Logarithmus-Funktionen enthalten; konkrete Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik sind mir keine bekannt.
- Weiterhin gibt es zahlreiche Funktionen, die als Stammfunktionen von Funktionen definiert sind in Fällen, in denen man die Stammfunktion eben nicht direkt angeben kann (obwohl sie existiert):
  - Die „Error-Funktion'' ist definiert als Integral über die Gauß'sche Glockenkurve (Normalverteilung) und deshalb in der Statistik sehr wichtig: $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

- Das Integral über den Kehrwert des natürlichen Logarithmus heißt „Integrallogarithmus‘‘; diese Funktion ist insbesondere in der Zahlentheorie sehr wichtig (Primzahlen, also auch Kryptografie, s.o.), aber es gibt auch Anwendungen in der Physik: $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$.
- Eng damit verwandt ist die „Integralexponentialfunktion‘‘ $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$.
- Analog dazu gibt es auch den „Integralsinus‘‘ $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ und ähnlich natürlich auch den „Integralcosinus‘‘.
- Außerdem gibt es auch noch die „Clausen-Funktion der Ordnung 2‘‘
  $Cl_2(x) = -\int_0^x \ln\left|2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$
  bzw. allgemeiner die „Clausen-Funktionen der Ordnung s‘‘
  $Cl_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^s}$ mit $s > 1$.
  Dazu kenne ich aber keine Anwendungen in Physik oder Informatik.

- Außerdem gibt es auch noch zahlreiche Funktionen, die man schlicht als Lösungen von Differenzialgleichungen definiert, wenn man die Lösungsfunktionen eben nicht durch die elementaren Funktionen ausdrücken kann. Besonders wichtig sind dabei die „Bessel-Funktionen‘‘, die in zahlreichen physikalisch-technischen Anwendungen auftauchen.
  - Die Bessel'sche Differenzialgleichung
    $$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$
    hat für jedes $n \in \mathbb{R}$ jeweils zwei verschiedene Lösungen, die Bessel-Funktionen erster und zweiter Art (oder „Gattung‘‘) $J_n(x)$ und $Y_n(x)$. Erstere bleiben für $x \to 0$ endlich, letztere gehen dabei gegen $-\infty$. Für $x \to \infty$ gehen beide oszillierend gegen 0.
  - Die „modifizierte‘‘ Bessel'sche Differenzialgleichung
    $$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0$$
    hat für jedes $n \in \mathbb{R}$ ebenfalls jeweils zwei verschiedene Lösungen, die „modifizierten‘‘ Bessel-Funktionen erster und zweiter Art (oder „Gattung‘‘) $I_n(x)$ und $K_n(x)$. Erstere bleiben für $x \to 0$ endlich, letztere gehen dabei gegen ∞. Für $x \to \infty$ steigen erstere exponentiell an, letztere fallen exponentiell ab.
  - Insbesondere für $n \in \mathbb{N}$ spricht man von „zylindrischen‘‘ Bessel-Funktionen – weil diese eben oft dann auftauchen, wenn man zylindersymmetrische Probleme löst (z. B. ein Koaxialkabel).
  - Außerdem gibt es auch noch die „sphärischen‘‘ Bessel-Funktionen – die eben dann oft auftauchen, wenn man kugelsymmetrische Probleme löst (z. B. bei der Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen, Streuung von Teilchen):
    $$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x) \text{ usw.}$$
    auch hier ist $n \in \mathbb{N}$, insgesamt ist der Index also halbzahlig.
  - Auch der Fall, dass der Index drittelzahlig ist, kommt öfters mal vor; man hat dann insbesondere die „Airy-Funktionen‘‘:
    $$Ai(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) - I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]; \quad Bi(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) + I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$
    Diese braucht man z. B. in der Quantenmechanik, um die möglichen Energien eines Teilchens im Schwerefeld der Erde zu berechnen, oder auch beim Tunneleffekt.

Zu all dem gibt es auch noch zahlreiche Erweiterungen und Abänderungen, beispielsweise die „unvollständige Gammafunktion‘‘ und die „unvollständigen elliptischen Integrale‘‘, die „mehrdimensionale Polylogarithmus-Funktionen‘‘ und die „hypergeometrischen Funktionen‘‘ (siehe z. B. [5]). Und richtig interessant wird alles sowieso erst dann, wenn man Funktionen nicht nur von den reellen, sondern auch von komplexen Zahlen betrachtet…

[1] Packel, Ed, and David Yuen. 2004. Projectile motion with resistance and the Lambert W function. The College Mathematics Journal 35:337–350.
https://www.researchgate.net/publication/228851314_Projectile_Motion_with_Resistance_and_the_Lambert_W_Function

[2] Banwell, T. C., and A. Jayakumar. 2000. Exact analytical solution for current flow through diode with series resistance. Electronics Letters 36:291–292.
https://search.proquest.com/openview/199d2ce2362bed0fe8d26b0ee4da1cb8/1.pdf?pq-origsite=gscholar&cbl=1936364

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Wiensches_Verschiebungsgesetz#Herleitungen

[4] https://www.youtube.com/watch?v=efvT2iUSjaA

[5] https://www.youtube.com/watch?v=j0t1yWrvKmE, https://www.youtube.com/watch?v=fYcUcj5kYqI