

Weitere (mehr oder weniger) wichtige Funktionen

Wer meint, dass man in der FOS 13 Technik schon alle Funktionen kennengelernt hätte, die es gibt (oder auch nur alle wichtigen), der/die täuscht sich leider gewaltig... Hier mal eine kleine Auswahl von Funktionen, denen man im Studium (Mathematik, Physik, Ingenieurwissenschaften, Informatik, ...) noch begegnen könnte.

- Hyperbelfunktionen: Sinus hyperbolicus $\sinh(x)$, Cosinus hyperbolicus $\cosh(x)$, Tangens hyperbolicus $\tanh(x)$

Diese Funktionen sind ähnlich definiert wie \sin , \cos , \tan , allerdings statt am Einheitskreis ($x^2 + y^2 = 1$) an der Einheitshyperbel ($x^2 - y^2 = 1$). Sie haben viele ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen. Man benötigt sie öfters in physikalisch-technischen Anwendungen, z. B. beschreibt der \cosh die Form einer/s durchhängenden Kette / Kabels.

Außerdem gibt es dazu auch noch die Umkehrfunktionen: Areasinus hyperbolicus $\operatorname{arsinh}(x)$ und entsprechend $\operatorname{arcosh}(x)$, $\operatorname{artanh}(x)$. Im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen kann man die Hyperbelfunktionen aber durch andere, einfachere Funktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}; & \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}; & \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right); & \operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right); \\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\end{aligned}$$

Alle bisherigen Funktionen nennt man oft auch „elementare Funktionen“. Alle folgenden Funktionen kann man dagegen **nicht** mehr durch diese einfacheren Funktionen ausdrücken! Sie werden öfters auch als „spezielle Funktionen“ bezeichnet.

- Die Lambert'sche W-Funktion ist definiert als die Umkehrfunktion zu $f(x) = x \cdot e^x$. Wird angeblich oft gebraucht, ist aber zumindest mir im Studium nie begegnet.
- Die Gamma- und Beta-Funktion sind beide jeweils über ein Integral definiert, das jeweils von einem bzw. zwei Parametern abhängt:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt; \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

Für natürliche Argumente kann man die Funktionswerte jeweils angeben:

$$\Gamma(k) = (k-1)!; \quad B(m, n) = \frac{(n-1)! \cdot (m-1)!}{(n+m-1)!} \quad \text{für } k, m, n \in \mathbb{N}$$

Für beide Funktionen gibt es jeweils noch zahlreiche andere Darstellungsmöglichkeiten, z. B.:

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(t) \cos^{2y-1}(t) dt$$

Wichtig sind die Funktionen z. B. in der statistischen Mechanik / Thermodynamik.

- Die sogenannten elliptischen Funktionen bzw. elliptischen Integrale sind wichtig (wie der Name schon sagt), wenn man Rechnungen zu Ellipsen macht, z. B. ihren Umfang ausrechnen will. Sie tauchen aber auch an vielen anderen Stellen auf, z. B. beim Fadenpendel. Auch sie sind, wie die Gamma- und Beta-Funktion, über Integrale definieren, die von einem oder zwei Parametern abhängen:

$$1. \text{ Art: } K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$2. \text{ Art: } E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt$$

$$3. \text{ Art: } \Pi(n, k) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

- Die (Riemann'sche) Zeta-Funktion und die (Dirichlet'sche) Eta-Funktion sind vor allem in der reinen Mathematik wichtig, insbesondere in der Zahlentheorie (darin geht es vor allem um Primzahlen – die sind aber auch in der Kryptographie wichtig, also in der Informatik!). Auch sie tauchen aber beispielsweise in der statistischen Mechanik / Thermodynamik auf. Ihre grundlegende Definition läuft über unendliche Summen („Reihen“):

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}; \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Auch bei diesen beiden Funktionen gibt es zahlreiche andere Darstellungen, z. B. die folgenden Integraldarstellungen mit Parameter, die eben in der statistischen Mechanik wichtig sind (z. B. bei der sogenannten Bose-Einstein-Kondensation, aber auch beim Verhalten von Metallen):

$$\zeta(x) \cdot \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt; \quad \eta(x) \cdot \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} dt$$

- Weiterhin gibt es zahlreiche Funktionen, die als Stammfunktionen von Funktionen definiert sind in Fällen, in denen man die Stammfunktion eben nicht direkt angeben kann (obwohl sie existiert):
 - Die „Error-Funktion“ ist definiert als Integral über die Gauß'sche Glockenkurve (Normalverteilung) und deshalb in der Statistik sehr wichtig: $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.
 - Das Integral über den Kehrwert des natürlichen Logarithmus heißt „Integrallogarithmus“; diese Funktion ist insbesondere in der Zahlentheorie sehr wichtig (Primzahlen, also auch Kryptografie, s.o.), aber es gibt auch Anwendungen in der Physik: $\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$.
 - Eng damit verwandt ist die „Integraleponentialfunktion“ $\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$.
 - Analog dazu gibt es auch den „Integralsinus“ $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ und ähnlich natürlich auch den „Integralcosinus“.
- Außerdem gibt es auch noch zahlreiche Funktionen, die man schlicht als Lösungen von Differenzialgleichungen definiert, wenn man die Lösungsfunktionen eben nicht durch die elementaren Funktionen ausdrücken kann. Besonders wichtig sind dabei die „Bessel-Funktionen“, die in zahlreichen physikalisch-technischen Anwendungen auftauchen (z. B. Fortpflanzung von elektrischen Signalen in einem Koaxialkabel, Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen durch elektrische Ladungen und Ströme, Streuung von Teilchen in der Quantenmechanik, Wellenfunktionen von Teilchen unter dem Einfluss der Gravitationskraft, Tunneleffekt, ...).
 - Die Bessel'sche Differenzialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$
 hat für jedes $n \in \mathbb{R}$ jeweils zwei verschiedene Lösungen, die Bessel-Funktionen erster und zweiter Art (oder „Gattung“) $J_n(x)$ und $Y_n(x)$. Erstere bleiben für $x \rightarrow 0$ endlich, letztere gehen dabei gegen $-\infty$. Für $x \rightarrow \infty$ gehen beide oszillierend gegen 0.
 - Die „modifizierte“ Bessel'sche Differenzialgleichung

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0$$
 hat für jedes $n \in \mathbb{R}$ ebenfalls jeweils zwei verschiedene Lösungen, die „modifizierten“ Bessel-Funktionen erster und zweiter Art (oder „Gattung“) $I_n(x)$ und $K_n(x)$. Erstere bleiben für $x \rightarrow 0$ endlich, letztere gehen dabei gegen ∞ . Für $x \rightarrow \infty$ steigen erstere exponentiell an, letztere fallen exponentiell ab.
 - Insbesondere für $n \in \mathbb{N}$ spricht man von „zylindrischen“ Bessel-Funktionen – weil diese eben oft dann auftauchen, wenn man zylindersymmetrische Probleme löst.
 - Außerdem gibt es auch noch die „sphärischen“ Bessel-Funktionen – die eben dann oft auftauchen, wenn man kugelsymmetrische Probleme löst:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \text{ usw.}$$
 auch hier ist $n \in \mathbb{N}$, insgesamt ist der Index also halbzahlilig.

- Auch der Fall, dass der Index drittelzählig ist, kommt öfters mal vor; man hat dann die „Airy-Funktionen“:

$$Ai(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) - I_{1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) \right]; \quad Bi(x) = \sqrt{\frac{x}{3}} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) + I_{1/3} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} \right) \right]$$

Zu all dem gibt es auch noch zahlreiche Erweiterungen und Abänderungen, beispielsweise die „unvollständige Gammafunktion“ und die „unvollständigen elliptischen Integrale“ oder die „hypergeometrischen Funktionen“. Und richtig interessant wird alles sowieso erst dann, wenn man Funktionen nicht nur von den reellen, sondern auch von komplexen Zahlen betrachtet...