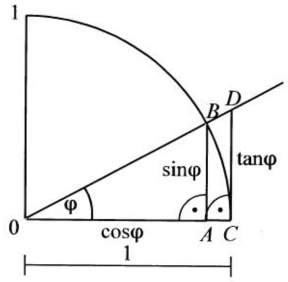
Sinus, Kosinus und Tangens im Einheitskreis

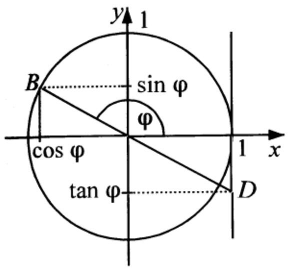
Liegt ein Punkt B auf einem Kreis um O mit Radius 1 und schließt die Halbgerade [OB mit der x-Achse den Winkel φ ein, so gilt:

$$\sin\varphi = \text{y-Koordinate von B}$$
$$\cos\varphi = \text{x-Koordinate von B}$$
$$\tan\varphi = \text{y-Koordinate von D,}$$

wobei D der Schnittpunkt der Gerade OB mit der Tangente im Punkt (0|1) an den Kreis ist. Damit sind sin, cos und tan auch für Winkel größer als 90° definiert.

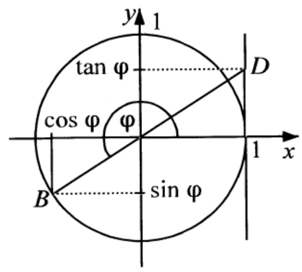


$90° \leq \varphi \leq 180°$



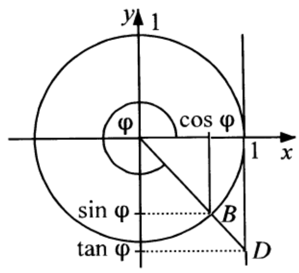
$\sin\varphi > 0$
$\cos\varphi < 0$
$\tan\varphi < 0$

$180° \leq \varphi \leq 270°$



$\sin\varphi < 0$
$\cos\varphi < 0$
$\tan\varphi > 0$

$270° \leq \varphi \leq 360°$



$\sin\varphi < 0$
$\cos\varphi > 0$
$\tan\varphi < 0$

Damit kann man auch sin, cos und tan für Winkel größer als 360° definieren: z. B. ist eine Drehung um 440° dasselbe wie eine Drehung um 360° (Volldrehung) und danach nochmals um 80°, also gilt:

$$\sin 440° = \sin 80°$$

Allgemein gilt: Ist ein Winkel φ kleiner 0° oder größer 360°, so kann man ihn immer schreiben als

$$\varphi = k \cdot 360° + \varphi'$$

mit einer ganzen Zahl k und einem Winkel φ' zwischen 0° und 360°. Daraus folgt die Periodizität von sin, cos und tan:

$$\sin(\varphi + k \cdot 360°) = \sin\varphi$$
$$\cos(\varphi + k \cdot 360°) = \cos\varphi$$
$$\tan(\varphi + k \cdot 180°) = \tan\varphi$$

Das Bogenmaß:

Die Einteilung einer vollen Drehung in 360° ist reichlich willkürlich (stammt von griechischen Mathematikern aus Alexandrien, ca. 170 v. Chr., und geht wahrscheinlich auf das babylonische 60er-Zahlensystem zurück; praktisch ist es nur insofern, weil 360 durch viele andere Zahlen teilbar ist). Außerdem ist es in der Analysis allgemein vorteilhafter, mit Längen zu rechnen als mit Winkeln (z. B. müsste sonst in einem Differenzialquotienten im Nenner „Grad" (°) stehen!). Um das zu erreichen, erinnert man sich daran, dass die Bogenlänge eines Kreissektors proportional zum Winkel des Sektors ist; deswegen definiert man:

Das Bogenmaß x eines Winkels φ ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis; es gilt:

$$x/2\pi = \varphi/360° \quad \text{bzw.} \quad x/\pi = \varphi/180°$$