

Ein ideales Gas (Gasteilchen punktförmig, keine Wechselwirkungen) wird bekanntlich durch die Gleichung $PV = nRT$ beschrieben (P : Druck; V : Volumen; n : Stoffmenge; R : ideale Gaskonstante; T : absolute Temperatur). Die Isothermen im p - V -Diagramm sind also Hyperbeln, da $p \sim 1/V$ ist. Ein reales Gas dagegen wird besser durch die van-der-Waals-Gleichung beschrieben:

$$\left(P + \frac{a n^2}{V^2} \right) (V - n b) = nRT \quad (\text{für } V > n b, T > \frac{a}{4Rb}).$$

Dabei ist a ein Maß für die Wechselwirkungen zwischen den Gasteilchen und b für ihr Eigenvolumen.

Um die Gleichung zu vereinfachen, führt man die Abkürzungen $p = \frac{b^2 P}{a}$, $v = \frac{V}{nb}$ und $t = \frac{bRT}{a}$ ein (dies sind einheitenlose Größen); dann bleibt

$$\left(p + \frac{1}{v^2} \right) \cdot (v - 1) = t \quad (\text{für } v > 1 \text{ und } t > 0,25).$$

a) Zeigen Sie, dass sich für den Druck in Abhängigkeit vom Volumen daraus ergibt:

$$p(v) = \frac{t \cdot v^2 - v + 1}{v^2 \cdot (v - 1)} = \frac{t \cdot v^2 - v + 1}{v^3 - v^2}.$$

b) Stellen Sie die Isothermen des realen Gases (also jeweils den Graph von $p(v)$) für $t = 0,26$, $t = \frac{8}{27}$ und $t = 0,4$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar ($0 \leq v \leq 10$, $0 \leq p \leq 0,1$).

c) Zeigen Sie, dass bei den Stellen mit waagrecht Tangente von p gelten muss:

$$2 \frac{(v-1)^2}{v^3} = t$$

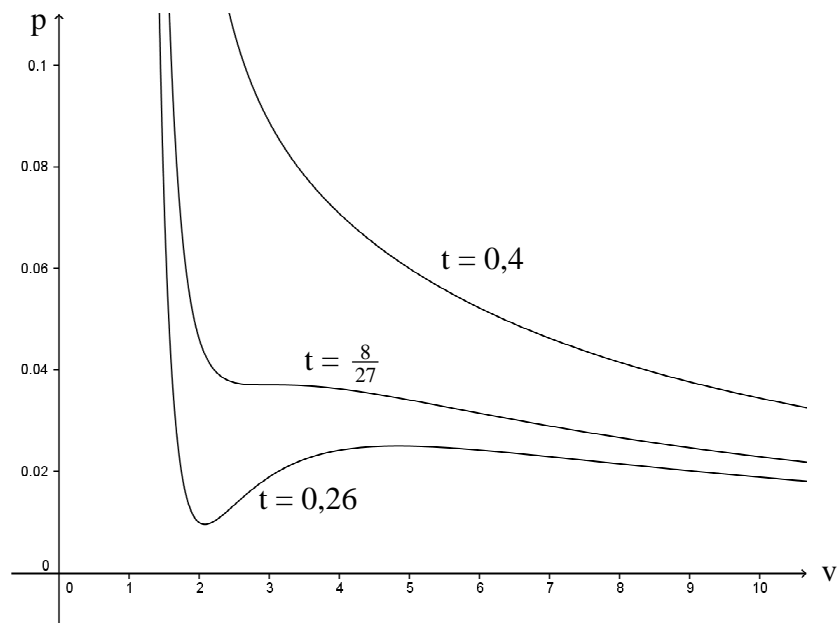
d) Finden Sie das absolute Maximum der Funktion f mit $f(v) = 2 \frac{(v-1)^2}{v^3}$; $v > 1$. Begründen Sie damit, dass p in Abhängigkeit von v keine Extremstellen haben kann, wenn $t > \frac{8}{27}$ ist.

a) Klammern ausmultiplizieren: $pv + \frac{1}{v} - p - \frac{1}{v^2} = t$

alles ohne p nach rechts, links p ausklammern: $p(v-1) = t - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} = \frac{t \cdot v^2 - v + 1}{v^2}$

durch $(v-1)$ teilen $\rightarrow p(v) = \frac{t \cdot v^2 - v + 1}{v^2 \cdot (v-1)}$; dann nur noch im Nenner die Klammer auflösen

b)



c) $p'(v) = \frac{dp}{dv} = \frac{(2tv-1) \cdot (v^3 - v^2) - (tv^2 - v + 1) \cdot (3v^2 - 2v)}{(v^3 - v^2)^2}$
 $= \frac{(2tv^4 - v^3 - 2tv^3 + v^2) - (3tv^4 - 3v^3 + 3v^2 - 2tv^3 + 2v^2 - 2v)}{(v^3 - v^2)^2} = \frac{-tv^4 + 2v^3 - 4v^2 + 2v}{(v^3 - v^2)^2}$

Stellen mit waagrechter Tangente: $\frac{dp}{dv} = 0 \rightarrow -tv^4 + 2v^3 - 4v^2 + 2v = 0$

$\rightarrow 2v^3 - 4v^2 + 2v = tv^4 \mid : v \neq 0 \rightarrow 2(v^2 - 2v + 1) = tv^3 \rightarrow 2 \frac{(v-1)^2}{v^3} = t$

d) $f'(v) = 2 \frac{2(v-1) \cdot 1 \cdot v^3 - (v-1)^2 \cdot 3v^2}{v^6} = 2 \frac{(2v^4 - 2v^3) - (3v^4 - 6v^3 + 3v^2)}{v^6}$
 $= 2 \frac{-v^4 + 4v^3 - 3v^2}{v^6} = 2 \frac{v^2 \cdot (-v^2 + 4v - 3)}{v^6} = 2 \frac{-v^2 + 4v - 3}{v^4}$

Stellen mit waagrechter Tangente: $f'(v) = 0 \rightarrow -v^2 + 4v - 3 = 0$

$\rightarrow v_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \rightarrow v_1 = 1 \notin \mathbb{D}_f; v_2 = 3$

Der Nenner von $f'(v)$ ist immer positiv; der Zähler stellt eine nach unten geöffnete Parabel dar, wechselt also bei 1 das VZ von - nach + und bei 3 von + nach - \rightarrow bei 1 wäre ein Minimum, bei 3 ist ein Maximum. $f(3) = \frac{8}{27}$; außerdem gilt $f(v) \rightarrow 0$ für $v \rightarrow 1$ und $f(v) \rightarrow 0$ für $v \rightarrow \infty$ \rightarrow Der Term $f(v) =$

$2 \frac{(v-1)^2}{v^3}$ nimmt für $v > 1$ höchstens den Wert $\frac{8}{27}$ an. \rightarrow Die Gleichung $2 \frac{(v-1)^2}{v^3} = t$ (mit $v > 1$) hat für

$t > \frac{8}{27}$ keine Lösungen; also hat dann $p(v)$ keine Extremstellen.

(Man kann auch noch zeigen, dass sich für $t = \frac{8}{27}$ ein Terrassenpunkt ergibt, für $t < \frac{8}{27}$ jeweils erst ein Minimum, dann ein Maximum.)

$g(v) = t v^3 - 2 v^2 + 4 v - 2 = p'(v) \cdot (v^3 - v^2)^2 : (-v) \rightarrow$ VZW von g sind umgekehrt wie bei p' ;

p' hat zusätzlich einen von $-$ nach $+$ bei 0

$g(0) = -2 < 0$; $g(1) = t > 0,25 > 0 \rightarrow g$ und damit auch p' hat zwischen 0 und 1 einen VZW

$$g'(v) = 3 t v^2 - 4 v + 4$$

$$g'(v) = 0 \rightarrow v_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3t \cdot 4}}{2 \cdot 3t} = \frac{4 \pm 4\sqrt{1-3t}}{6t} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-3t}}{3t}$$

1) $1 - 3t < 0$, also $t > \frac{1}{3}$: keine Lösung $\rightarrow g'(v) > 0$ für alle $v \rightarrow g$ steigt streng monoton für alle v

$\rightarrow g$ hat nur eine einfache Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$ zwischen 0 und 1 (s.o.) $\rightarrow p'(v) = 0$ hat eine einfache Lösung mit $0 < v < 1$ mit VZW von $+$ nach $-$ und eine einfache Lösung bei 0 mit VZW von $-$ nach $+$ $\rightarrow p$ hat bei $v > 1$ keine Punkte mit waagrechter Tangente

2) $1 - 3t = 0$, also $t = \frac{1}{3}$: eine doppelte Lösung bei $v = 2 \rightarrow g(v)$ hat nur den TeP($2|\frac{2}{3}$) $\rightarrow g$ steigt streng

monoton für alle $v \rightarrow g$ hat nur eine einfache Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$ zwischen 0 und 1 (s.o.)

$\rightarrow p'(v) = 0$ hat eine einfache Lösung mit $0 < v < 1$ mit VZW von $+$ nach $-$ und eine einfache Lösung bei 0 mit VZW von $-$ nach $+$ $\rightarrow p$ hat bei $v > 1$ keine Punkte mit waagrechter Tangente

3) $1 - 3t > 0$, also $0,25 < t < \frac{1}{3}$: zwei einfache Lösungen bei $v_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-3t}}{3t}$; g' beschreibt eine nach

oben geöffnete Parabel \rightarrow bei $\frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t}$ VZW von $g'(v)$ von $+$ nach $-$, bei $\frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t}$ VZW von g'

von $-$ nach $+$ $\rightarrow g$ hat zuerst einen HoP bei $\frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t}$ und dann einen TiP bei $\frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t}$

$$g\left(\frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t}\right) = \dots \rightarrow \text{HoP}\left(\frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} \mid \frac{16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16}{27t^2}\right)$$

$$g\left(\frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t}\right) = \dots \rightarrow \text{TiP}\left(\frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} \mid \frac{-16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16}{27t^2}\right)$$

3a) HoP unter v -Achse, wenn $16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16 < 0 \rightarrow t < 0 \rightarrow$ nicht möglich

3b) HoP auf v -Achse, wenn $16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16 = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow$ nicht möglich

3c) HoP über v -Achse, TiP unter v -Achse, wenn $16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16 > 0$

und $-16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16 < 0 \rightarrow 0 < t < \frac{8}{27} \rightarrow$ nur möglich: $0,25 < t < \frac{8}{27}$

dann: g hat drei einfache Nullstellen

$$\text{wegen } 0,25 < t < \frac{8}{27} \text{ ist } \frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2} \text{ und } 3 < \frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} < 4$$

da HoP über v -Achse \rightarrow bei $\frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2}$ ist $g(v) > 0$; da aber $g(0) = -2 < 0 \rightarrow$ die erste

Nullstelle muss zwischen 0 und $\frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2}$ liegen, und dort ist ein VZW von g von $-$ nach $+$

da TiP unter v -Achse \rightarrow die zweite Nst. muss zwischen $\frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2}$ und $3 < \frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} < 4$

liegen, und dort ist ein VZW von g von $+$ nach $-$; die dritte muss bei $v > \frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} > 3$ liegen, und

dort ist ein VZW von g von $-$ nach $+$

→ $p'(v)$ hat vier Nullstellen: bei $0 \notin \mathbb{D}$ ist ein VZW von $-$ nach $+$, zwischen 0 und $\frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2}$
ein VZW von $+$ nach $-$, zwischen $\frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2}$ und $3 < \frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} < 4$ ein VZW von $-$ nach $+$
und bei der letzten mit $v > \frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} > 3$ ein VZW von $+$ nach $-$

→ $p(v)$ hat (einen TiP bei 0 ,) einen HoP zwischen 0 und $\frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2}$, einen TiP zwischen $\frac{4}{3} < \frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} < \frac{3}{2}$ und $3 < \frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} < 4$ und einen HoP bei $v > \frac{2+2\sqrt{1-3t}}{3t} > 3$

3d) TiP auf v -Achse, wenn $-16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16 = 0 \rightarrow t = \frac{8}{27}$

dann: g hat eine einfache Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$ zwischen 0 und $\frac{2-2\sqrt{1-3 \cdot \frac{8}{27}}}{3 \cdot \frac{8}{27}} = \frac{3}{2}$ (siehe

3c), eine doppelte Nullstelle bei $\frac{2+2\sqrt{1-3 \cdot \frac{8}{27}}}{3 \cdot \frac{8}{27}} = 3$

→ $p'(v)$ hat eine einfache Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$ bei $0 \notin \mathbb{D}$, eine einfache Nullstelle mit VZW von $+$ nach $-$ zwischen 0 und $\frac{3}{2}$ und eine doppelte Nullstelle bei 3

→ $p(v)$ hat (einen TiP bei 0 ,) einen HoP zwischen 0 und $\frac{3}{2}$ und einen TeP bei 3

3e) TiP über v -Achse, wenn $-16 \cdot (1-3t)^{3/2} - 54t^2 + 72t - 16 > 0 \rightarrow \frac{8}{27} < t \leq \frac{1}{3}$

dann: g hat eine einfache Nst. mit VZW von $-$ nach $+$ zwischen 0 und $\frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} > \frac{3}{2}$ (siehe 3c)

→ $p'(v)$ hat eine einfache Nullstelle mit VZW von $-$ nach $+$ bei 0 und eine einfache Nullstelle mit VZW von $+$ nach $-$ zwischen 0 und $\frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} > \frac{3}{2}$

→ $p(v)$ hat (einen TiP bei 0 und) einen HoP zwischen 0 und $\frac{2-2\sqrt{1-3t}}{3t} > \frac{3}{2}$