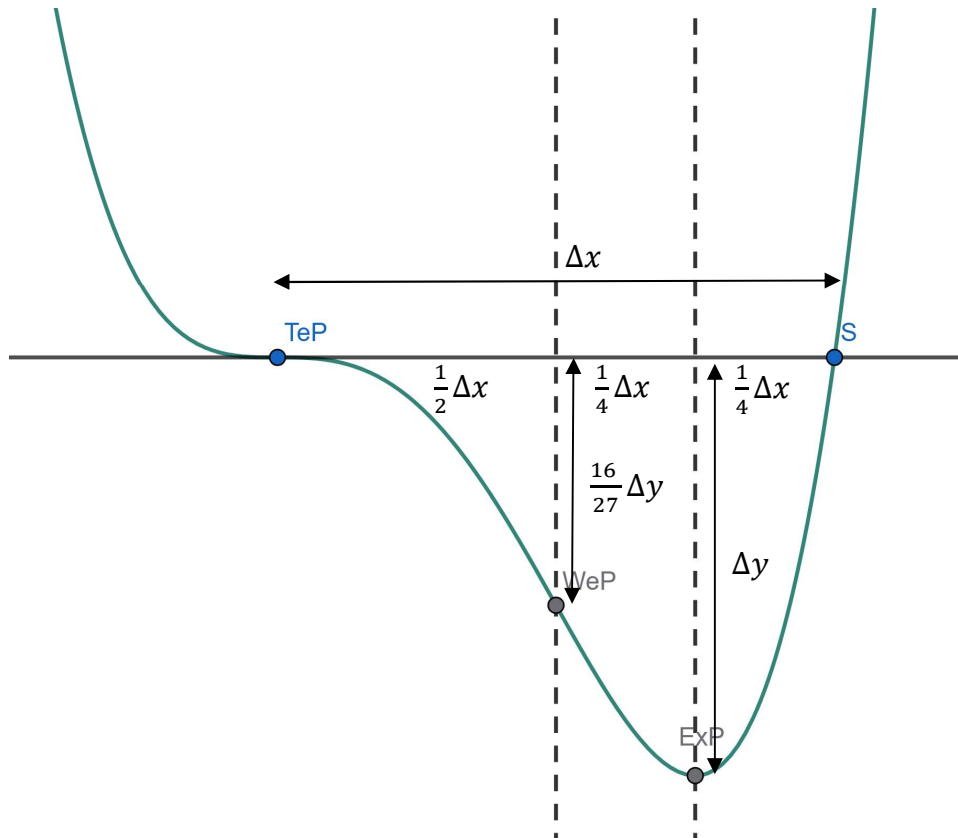


Streckenverhältnisse bei den Extrem- und Wendepunkten quartischer Funktionen

a) quartische Funktionsgraphen mit einem Terrassenpunkt

Bei solchen Funktionen gilt immer: Wenn man die Tangente im Terrassenpunkt einzeichnet, dann wird die Strecke von diesem Terrassenpunkt zum Schnittpunkt dieser Tangente mit dem Graphen halbiert von einer zweiten Wendestelle; die Strecke von der zweiten Wendestelle zu dieser Schnittstelle wird wiederum von einer Extremstelle halbiert. Außerdem gilt: Die Abstände des Wendepunkts und des Extrempunkts zu dieser Tangente in y-Richtung verhalten sich immer wie 16 zu 27 (siehe Skizze unten).



Da es hier um Verhältnisse von Streckenlängen geht und solche Verhältnisse sich nicht ändern, wenn man einen Graphen verschiebt, streckt/staucht bzw. spiegelt, genügt es, den Beweis für einen besonders einfachen Graphen zu führen – da man jeden anderen Graphen einer quartischen Funktion mit Terrassenpunkt eben erhält, indem man diesen Graphen verschiebt, streckt/staucht bzw. spiegelt, gilt die Aussage damit dann automatisch für alle solchen quartischen Funktionen.

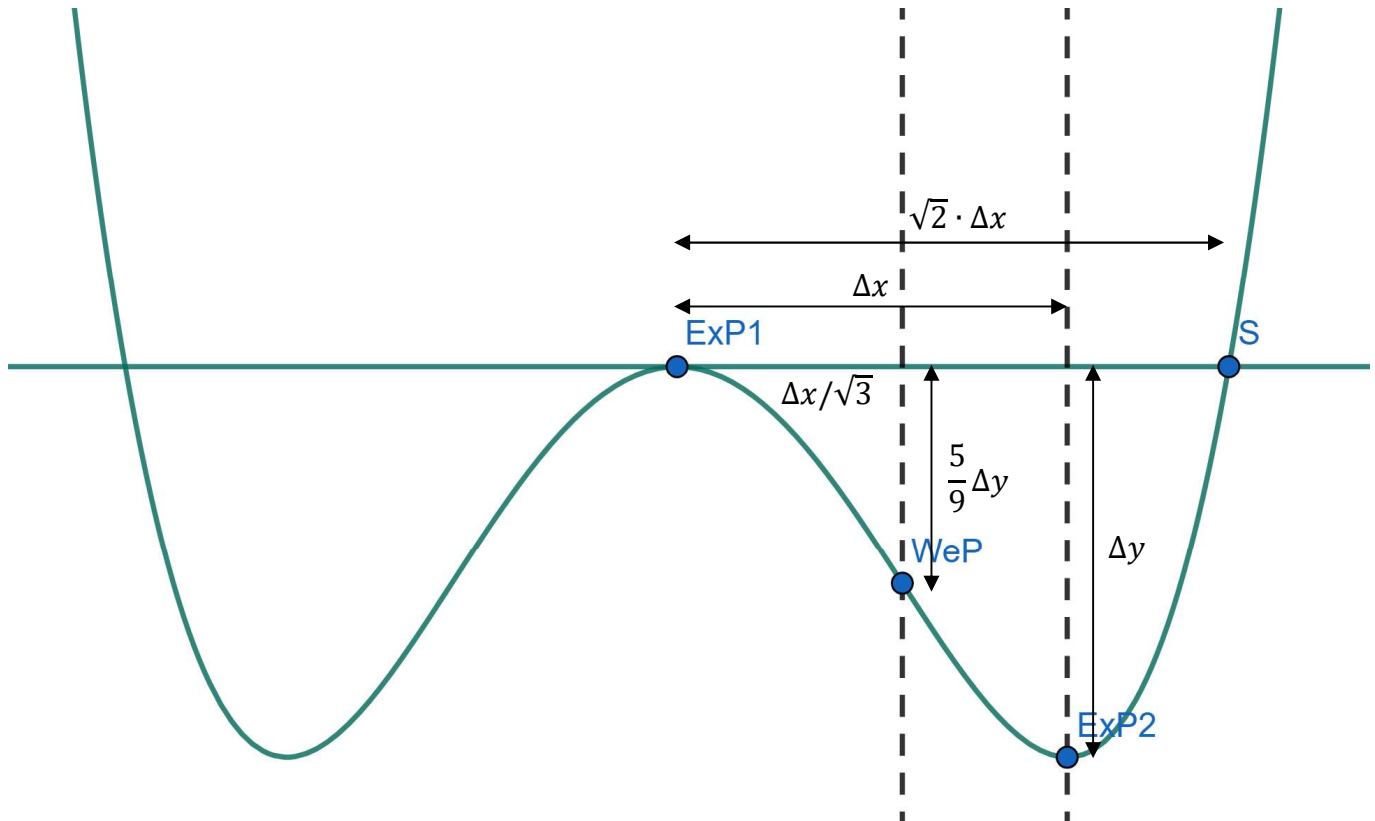
Wir betrachten hier die quartische Funktion $f(x) = x^4 - 4x^3$; dann ist $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x$, und für die Terrassenstelle, die Schnittstelle, die zweite Wendestelle und die Extremstelle erhält man dann schnell $x_{Te} = 0, x_S = 4, x_W = 2$ und $x_E = 3$.

Damit ist die erste Behauptung schon gezeigt: Die Strecke vom Terrassenpunkt (bei $x = 0$) zum Schnittpunkt (bei $x = 4$) wird tatsächlich von der zweiten Wendestelle (bei $x = 2$) halbiert, und die Strecke von der zweiten Wendestelle (bei $x = 2$) zur Schnittstelle (bei $x = 4$) wird tatsächlich von der Extremstelle (bei $x = 3$) wiederum halbiert.

Für die zweite Behauptung brauchen wir die Gleichung der Tangente und die y-Koordinaten des Wendepunkts und des Extrempunkts. Das alles rechnet man auch schnell aus: Die Tangente hat die Gleichung $y = 0$, die y-Koordinaten sind $y_W = -16$; $y_E = -27$. Die Abstände in y-Richtung zur Tangente sind damit einfach $\Delta y_W = 16$ und $\Delta y_E = 27$, und offensichtlich verhalten sich diese beiden Abstände wie 16 zu 27.

b) symmetrische quartische Funktionsgraphen mit drei Extrempunkten

Bei solchen Funktionen gilt immer: Wenn man die Tangente im mittleren Extrempunkt einzeichnet, dann verhalten sich die Strecken auf dieser Tangente zur Wendestelle bzw. zur nächsten Extremstelle bzw. zur nächsten Schnittstelle der Tangente mit dem Graphen wie $\frac{1}{\sqrt{3}}$ zu 1 zu $\sqrt{2}$. Außerdem gilt: Die Abstände des Wendepunkts und des nächsten Extrempunkts zu dieser Tangente in y-Richtung verhalten sich immer wie 5 zu 9 (siehe Skizze unten).



Wieder genügt es, den Beweis für einen besonders einfachen Graphen zu führen – da man jeden anderen symmetrischen Graphen einer quartischen Funktion mit drei Extrempunkten erhält, indem man diesen einfachen Graphen verschiebt, streckt/staucht bzw. spiegelt, gilt die Aussage damit dann automatisch für alle solchen quartischen Funktionen.

Wir betrachten hier die quartische Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; dann ist $f'(x) = 4x^3 - 4x$, $f''(x) = 12x^2 - 4$, und für die mittlere Extremstelle, die Schnittstelle, die zweite Extremstelle und die Wendestelle erhält man dann schnell $x_{E1} = 0$, $x_S = \sqrt{2}$, $x_{E2} = 1$ und $x_W = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Damit ist die erste Behauptung schon gezeigt.

Für die zweite Behauptung brauchen wir die Gleichung der Tangente und die y-Koordinaten des Wendepunkts und des zweiten Extrempunkts. Das alles rechnet man auch schnell aus: Die Tangente hat die Gleichung $y = 1$, die y-Koordinaten sind $y_W = \frac{4}{9}$; $y_{E2} = 0$. Die Abstände in y-Richtung zur Tangente sind damit einfach $\Delta y_W = \frac{5}{9}$ und $\Delta y_E = 1$, und offensichtlich verhalten sich diese beiden Abstände wie 5 zu 9.