<u>Quadratische Funktionen</u>

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx + c$ (allgemeine Form) bzw. $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform) mit den Formvariablen a, b und $c \in \mathbb{R}$ bzw. a, x_S und $y_S \in \mathbb{R}$ heißen <u>quadratische Funktionen</u>. Ihre Graphen sind <u>Parabeln</u>, speziell für $|a| = 1$: Normalparabeln. Der höchste bzw. tiefste Punkt des Graphen heißt <u>Scheitel</u>(punkt) S. Der Graph ist jeweils achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = x_S$; die beiden Teile der Parabel links und rechts davon heißen Parabeläste.

Die Formvariablen haben folgende Bedeutung:

a: „Öffnungsfaktor'', beschreibt Form und Richtung der Parabel:

$a > 0$: nach oben geöffnet	$|a| < 1$: gestaucht; breiter als Normalparabel
$a < 0$: nach unten geöffnet	$|a| > 1$: gestreckt; schmaler als Normalparabel

(**b:** Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der y-Achse) **c:** y-Achsenabschnitt

x_S bzw. **y_S**: Abszisse bzw. Ordinate des Scheitels

<u>Berechnung von S mit quadratischer Ergänzung:</u>

allgemein	**Beispiel: $y = 2x^2 + 6x - 4$**
a ausklammern	$y = 2\,(x^2 + 3x - 2)$ (oder: $y = 2\,(x^2 + 3x) - 4$)
quadratische Ergänzung: die Hälfte des Vorfaktors von x, quadriert, addieren und subtrahieren	$y = 2\,(x^2 + 3x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 2)$ (oder : $y = 2\,(x^2 + 3x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2) - 4$)
1. bzw. 2. binomische Formel rückwärts anwenden	$y = 2\,(\,(x + 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 - 2)$ (oder: $y = 2\,(\,(x + 1{,}5)^2 - 1{,}5^2) - 4$)
äußere Klammer auflösen und zusammenfassen	$y = 2\,(x + 1{,}5)^2 - 8{,}5 \Rightarrow S(-1{,}5 \mid -8{,}5)$

<u>Berechnung der Nullstellen / quadratische Gleichungen lösen:</u>

1) für $b = 0$ („reinquadratische Gleichung"):

allgemein	**Beispiel: $2x^2 - 18 = 0$**
x^2 isolieren	$\mid +18 \Rightarrow 2x^2 = 18 \;\mid :2 \Rightarrow x^2 = 9$
± Wurzel ziehen	$x_{1,2} = \pm 3$

2) für $c = 0$ („defektquadratische Gleichung"):

allgemein	**Beispiel: $2x^2 + 5x = 0$**
ax ausklammern	$2x \cdot (x + 2{,}5) = 0$
Lösungen ablesen	$x_1 = 0$; $x_2 = -2{,}5$

Hier wird der <u>Satz vom Nullprodukt</u> benutzt:

Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn (mindestens) einer der Faktoren gleich null ist.

3) mit binomischen Formeln

allgemein	**Beispiel: $2x^2 - 12x + 18 = 0$**
a ausklammern	$2\,(x^2 - 6x + 9) = 0$
binomische Formel (rückwärts) benutzen	$2\,(x - 3)^2 = 0$
Lösung ablesen	$x_{1,2} = 3$

4) in Scheitelform

allgemein	**Beispiel: $2\,(x + 1)^2 - 8 = 0$**
Klammer isolieren	$\mid +8 \;\Rightarrow\; 2\,(x+1)^2 = 8 \mid :2 \;\Rightarrow\; (x+1)^2 = 4$
$\pm$ Wurzel ziehen	$x + 1 = \pm 2$
x isolieren	$\mid -1 \;\Rightarrow\; x = \pm 2 - 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 1;\ x_2 = -3$

5) Lösungsformel / a-b-c-Formel / Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(Falls die Gleichung die „Normalform“ $x^2 + px + q = 0$ hat, spricht: wenn a = 1 ist, so kann man auch die „p-q-Formel“ verwenden: $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.)

Anzahl der Nullstellen/Lösungen: Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ berechnen (bzw. $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q$)

D > 0: zwei Nullstellen/Lösungen
D = 0: eine Nullstelle/Lösung
D < 0: keine Nullstelle/Lösung

6) Satz von Vieta: *(muss man nicht können!)*

Allgemein	**Beispiel: $2x^2 + 2x - 4 = 0$**
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -p;\quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = q$	$x_1 + x_2 = -1;\quad x_1 \cdot x_2 = -2$
Lösungen der beiden Gleichungen „erraten“	$x_1 = 1;\quad x_2 = -2$

Faktorisierung / Linearfaktorform / Produktform:

Sind x_1 und x_2 die (verschiedenen) Nullstellen einer quadratischen Funktion, so kann man ihren Funktionsterm auch in der Form

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

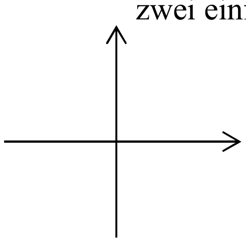
schreiben; x_1 und x_2 heißen dann einfache Nullstellen. Ist x_1 die einzige Nullstelle, so kann man den Funktionsterm auch in der Form

$$f(x) = a\,(x - x_1)^2$$

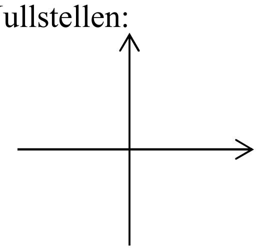
schreiben. x_1 heißt dann eine doppelte Nullstelle der Funktion. (Wenn es keine Nullstellen gibt, dann ist keine Faktorisierung möglich.)

graphisch:

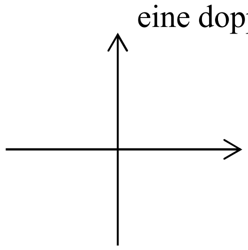
zwei einfache Nullstellen:



oder



eine doppelte Nullstelle:



oder