Beweis: π ist irrational

Schon die alten Griechen, hunderte von Jahren vor unserer Zeitrechnung, kannten irrationale Zahlen (also Zahlen, die man nicht als Bruch schreiben kann, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind), und sie kannten auch schon recht gute Näherungen für die Kreiszahl π. Was sie aber noch nicht wussten, war, ob π eigentlich eine rationale Zahl ist oder nicht… Und es vergingen ca. 2000 Jahre, bis diese Frage endgültig geklärt wurde!

Der erste Beweis, dass π irrational ist, stammt erst irgendwann aus der Zeit zwischen 1761 und 1767 (man findet dazu verschiedene Angaben), vom schweizerischen Mathematiker Johann Heinrich Lambert. Dieser Beweis ist aber reichlich unübersichtlich und verwendet Konzepte, die man aus dem Unterricht eher nicht kennt (sogenannte „Kettenbrüche‟); wen's interessiert: eine gute Darstellung gibt z. B. dieses Video:

https://www.youtube.com/watch?v=Lk_QF_hcM8A

Im Jahre 1873 veröffentlichte dann der französische Mathematiker Charles Hermite einen ganz anderen Beweis – der unter anderem partielle Integration und Fakultäten verwendet! Das sollte also mit Schulstoff verständlich sein (in Australien kam es sogar schon mal in einer Abschlussprüfung dran!). Im Folgenden orientiere ich mich ganz grob an dem Video

https://www.youtube.com/watch?v=jGZtVl4XfGo

bei mir ist aber die Reihenfolge anders, und ich bin auch an manchen Stellen ausführlicher, an anderen dafür weniger ausführlich.

Wir schauen uns als Vorbereitung die folgenden Integrale an, die als Parameter jeweils zwei beliebige natürliche Zahlen b und n haben:

$$I_{b,n} = \frac{b^{2n}}{n!} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)^n \sin(x)\, dx.$$

(Warum wir uns die anschauen, wird erst sehr viel weiter unten klar werden… keine Ahnung, wie Hermite darauf kam!)

(1) Zunächst sehen wir, dass der Vorfaktor sicher positiv ist (weil b und n natürliche Zahlen sind), und der Integrand ist im ganzen Integrationsbereich jeweils sicher auch größer oder gleich null: Der Faktor $\pi x - x^2$ beschreibt eine nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen bei 0 und bei π, also ist $(\pi x - x^2)^n \geq 0$ für $0 \leq x \leq \pi$. Dass der Sinus zwischen 0 und π nur positive Werte bzw. 0 annimmt, sollte auch bekannt sein. Also folgt schon mal, dass für alle natürlichen Zahlen b und n jeweils $I_{b,n} > 0$ gilt.

(2) Den Scheitelpunkt der Parabel kann man leicht ausrechnen: $S\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi^2}{4}\right)$; also gilt überall, dass $(\pi x - x^2)^n \leq \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n$ ist. Außerdem ist der größte Wert des Sinus im Integrationsbereich offensichtlich 1. Somit folgt insgesamt:

$$I_{b,n} < \frac{b^{2n}}{n!} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cdot 1\, d = \frac{b^{2n}}{n!} \cdot \left(\frac{\pi^2}{2^2}\right)^n \cdot \int_0^{\pi} 1\, dx = \frac{\left(\frac{b^2\pi^2}{2^2}\right)^n}{n!} \cdot \int_0^{\pi} 1\, dx,$$

und dann kann man das Integral natürlich sehr leicht ausrechnen. Am Schluss bleibt

$$I_{b,n} \leq \frac{c^n}{n!} \cdot \pi = \frac{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \pi,$$

wobei wir $c = \frac{b^2\pi^2}{2^2}$ abgekürzt haben.

Oben und unten stehen hier jeweils n Faktoren. Allerdings bleibt der Faktor c oben immer gleich, egal wie groß n wird; die Faktoren unten werden dagegen immer größer. Wenn n sehr, sehr groß wird, dann wird der Bruch also irgendwann kleiner als 1 und sogar kleiner als 1/π, d. h., wenn man n groß genug wählt, dann ist sicher irgendwann $I_{b,n} < 1$.

(3) Wenn wir die Ergebnisse aus (1) und (2) zusammen nehmen, dann erhalten wir: Wenn man n groß genug wählt, dann ist sicher irgendwann $0 < I_{b,n} < 1$. Und daraus folgt nun etwas ganz Wesentliches:

Wenn man n nur groß genug wählt, dann ist sicher $I_{b,n}$ irgendwann keine ganze Zahl mehr! (Denn zwischen 0 und 1 gibt es ja offensichtlich keine ganze Zahl.) Diese Erkenntnis nennen wir (I). Im Folgenden versuchen wir nun, $I_{b,n}$ konkret auszurechnen.

(4) Berechnen wir erst mal die ersten zwei Werte:

$$I_{b,0} = \frac{b^0}{0!}\int_0^\pi (\pi x - x^2)^0 \sin(x)\,dx = \frac{1}{1}\int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0),$$

also

$$I_{b,0} = 2$$

und

$$I_{b,1} = \frac{b^2}{1!}\int_0^\pi (\pi x - x^2)^1 \cdot \sin(x)\,dx.$$

Hier benötigen wir nun partielle Integration. Es wird jeweils die ganzrationale Funktion abgeleitet, der Sinus aufgeleitet; die Zwischenschritte sollte jeder selbst nachrechnen können.

$$I_{b,1} = b^2\left([-(\pi x - x^2)\cdot\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi (\pi - 2x)\cdot\cos(x)\,dx\right)$$

$$= b^2\left([-(\pi x - x^2)\cdot\cos(x)]_0^\pi + [(\pi - 2x)\cdot\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-2)\cdot\sin(x)\,dx\right)$$

$$= b^2\cdot\left([-(\pi x - x^2)\cdot\cos(x)]_0^\pi + [(\pi - 2x)\cdot\sin(x)]_0^\pi + [-2\cos(x)]_0^\pi\right) = b^2\cdot(0+0+4),$$

also

$$I_{b,1} = 4b^2.$$

Die ersten zwei Werte von $I_{b,n}$ sind also sicher schon mal ganze Zahlen (weil b ja eine natürliche Zahl sein soll.)

(5) $I_{b,n}$ für Werte von $n > 1$ auszurechnen, wird natürlich immer schwieriger. Wir können aber trotzdem mithilfe von partieller Integration eine allgemeine Formel herleiten; letztlich läuft es so ähnlich wie bei einem „Phönix''-Integral. Dafür wird im Folgenden jeweils wieder der ganzrationale Faktor $(\pi x - x^2)^n$ abgeleitet, der Sinus aufgeleitet. Erst mal als Nebenrechnung die Ableitung (mit Kettenregel):

$$((\pi x - x^2)^n)' = n\,(\pi x - x^2)^{n-1}\cdot(\pi - 2x)$$

Damit können wir nun die partielle Integration machen, ganz ähnlich wie in Schritt (3):

$$I_{b,n} = \frac{b^{2n}}{n!}\left([-(\pi x - x^2)^n\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)\cdot\cos(x)\,dx\right)$$

Bevor wir weiter machen, schauen wir uns erst mal den Term in den eckigen Klammern genauer an: Wenn man dort 0 einsetzt, kommt sicher 0 heraus; wenn man π einsetzt, kommt aber auch 0 heraus. (Vorsicht: Das gilt natürlich nur für $n > 0$, aber wir hatten hier ja sogar $n > 1$ vorausgesetzt.) Also ist der komplette Term in den eckigen Klammern gleich 0, und es bleibt „nur'' noch

$$I_{b,n} = \frac{b^{2n}}{n!}\cdot\int_0^\pi n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)\cdot\cos(x)\,dx.$$

Leider sind wir damit noch nicht fertig: Im Integral steht nun ein Cosinus, wenn wir so etwas wie den „Phönix‘‘ haben wollen, brauchen wir ja aber wieder einen Sinus, wie im ursprünglichen Integral. Also ist noch eine zweite partielle Integration nötig! Wieder erst mal als Nebenrechnung die Ableitung des ganzrationalen Terms; hier brauchen wir nun auch die Produktregel:

$$\left(n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)\right)' = n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x) + n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)'$$
$$= n(n-1)(\pi x - x^2)^{n-2}(\pi - 2x)^2 - 2n(\pi x - x^2)^{n-1}.$$

(Vorsicht: Hier ist nun wieder die Voraussetzung $n > 1$ wichtig!). Im zweiten Summanden haben wir hier nur wieder eine Potenz von $(\pi x - x^2)$, im ersten Summanden aber auch noch den Faktor $(\pi - 2x)^2$. Nehmen wir mal die binomische Formel her und versuchen, das alles ein wenig zu vereinfachen:

$$(\pi - 2x)^2 = \pi^2 - 4\pi x + 4x^2 = \pi^2 - 4(\pi x - x^2);$$

hier taucht also wieder ein Faktor $(\pi x - x^2)$ auf! Setzen wir das oben ein,

$$\left(n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)\right)' = n(n-1)(\pi x - x^2)^{n-2} \cdot \left(\pi^2 - 4(\pi x - x^2)\right) - 2n(\pi x - x^2)^{n-1}.$$

Lösen wir die Klammer auf, so wird das erst mal reichlich unübersichtlich,

$$= n(n-1)\pi^2(\pi x - x^2)^{n-2} - 4n(n-1)(\pi x - x^2)^{n-1} - 2n(\pi x - x^2)^{n-1}.$$

Nun können wir aber die hinteren beiden Summanden zusammenfassen, der vordere bleibt einfach stehen:

$$= n(n-1)\pi^2(\pi x - x^2)^{n-2} - (4n(n-1) + 2n)(\pi x - x^2)^{n-1}$$
$$= n(n-1)\pi^2(\pi x - x^2)^{n-2} - (4n^2 - 2n)(\pi x - x^2)^{n-1}$$
$$= n(n-1)\pi^2(\pi x - x^2)^{n-2} - 2n(2n-1)(\pi x - x^2)^{n-1}.$$

Jetzt kommt endlich die zweite partielle Integration,

$$I_{b,n} = \frac{b^{2n}}{n!}\Bigg(\left[n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x) \cdot \sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(n(n-1)\pi^2(\pi x - x^2)^{n-2} - 2n(2n-1)(\pi x - x^2)^{n-1}\right) \cdot \sin(x)\, dx \Bigg).$$

Wieder können wir argumentieren, dass der Term in den eckigen Klammern insgesamt gleich 0 ergibt (wieder ist dafür die Voraussetzung $n > 1$ wichtig). Im restlichen Integral können wir noch das Minus reinziehen und die Reihenfolge umstellen; also bleibt

$$I_{b,n} = \frac{b^{2n}}{n!}\left(\int_0^\pi \left(2n(2n-1)(\pi x - x^2)^{n-1} - n(n-1)\pi^2(\pi x - x^2)^{n-2}\right) \cdot \sin(x)\, dx \right).$$

Dies können wir nun auch in zwei Integrale aufteilen und dabei gleich noch jeweils konstante Faktoren rausziehen,

$$I_{b,n} = 2(2n-1) \cdot \frac{b^{2n}}{n!} \cdot n \int_0^\pi x^{n-1}(\pi - x)^{n-1} \sin(x)\, dx$$
$$-\pi^2 \cdot \frac{b^{2n}}{n!} \cdot n(n-1) \int_0^\pi x^{n-2}(\pi - x)^{n-2} \sin(x)\, dx. \quad (*)$$

In den Integralen steht nun jeweils $n-1$ bzw. $n-2$ statt, wie im ursprünglichen Integral, einfach n. Es ist also naheliegend, dass diese Integrale etwas mit $I_{b,n-1}$ bzw. $I_{b,n-2}$ zu tun haben. Die Vorfaktoren stimmen aber noch nicht ganz; nach Definition gilt:

$$I_{b,n-1} = \frac{b^{2(n-1)}}{(n-1)!}\int_0^\pi x^{n-1}(\pi - x)^{n-1}\sin(x)\,dx; \quad I_{b,n-2} = \frac{b^{2(n-2)}}{(n-2)!}\int_0^\pi x^{n-2}(\pi - x)^{n-2}\sin(x)\,dx.$$

Daraus folgt aber sofort:

$$\int_0^\pi x^{n-1}(\pi - x)^{n-1}\sin(x)\,dx = \frac{(n-1)!}{b^{2(n-1)}} I_{b,n-1}; \qquad \int_0^\pi x^{n-2}(\pi - x)^{n-2}\sin(x)\,dx = \frac{(n-2)!}{b^{2(n-2)}} I_{b,n-2}.$$

Setzen wir das nun in (*) ein, so bleibt

$$I_{b,n} = 2(2n-1)\cdot\frac{b^{2n}}{n!}\cdot n\cdot\frac{(n-1)!}{b^{2(n-1)}} I_{b,n-1} - \pi^2\cdot\frac{b^{2n}}{n!}\cdot n(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{b^{2(n-2)}} I_{b,n-2}.$$

Fast fertig – der Rest ist Algebra (Zusammenfassen!). Im ersten Summanden nutzen wir aus, dass nach Definition der Fakultät gilt: $n! = n\cdot(n-1)!$; also ist $\frac{b^{2n}}{n!}\cdot n\cdot\frac{(n-1)!}{b^{2(n-1)}} = \frac{b^{2n}}{n!}\cdot\frac{n!}{b^{2n-2}} = b^2$. Genauso folgt im zweiten Summanden $\frac{b^{2n}}{n!}\cdot n(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{b^{2(n-2)}} = b^4$. Schließlich und endlich vereinfacht sich (*) zu

$$I_{b,n} = 2(2n-1)\cdot b^2\cdot I_{b,n-1} - \pi^2\cdot b^4\cdot\ I_{b,n-2}. \quad (**)$$

Damit ist nun endlich Schritt (5) fertig. (Eigentlich sind alles Standard-Rechnungen – aber es ist eben doch sehr unübersichtlich, und man kann sehr leicht Fehler machen…)

(6) Nun kommt der nächste wesentliche Gedankenschritt. Zur Erinnerung: Eigentlich wollten wir zeigen, dass π eine irrationale Zahl ist. Wir führen nun einen sogenannten „Widerspruchsbeweis" durch: Wir nehmen an, dass π eine rationale Zahl wäre, und zeigen, dass das zu einer offensichtlich falschen Aussage führt. Damit kann π dann nur noch irrational sein.

Nehmen wir also nun an, dass π rational wäre. Das heißt aber nichts anderes, als dass man π als einen Bruch schreiben könnte, wobei Zähler und Nenner natürliche Zahlen sein müssen. Nehmen wir also an, dass $\pi = \frac{a}{b}$ ist mit natürlichen Zahlen a, b. Dies setzen wir nun in unser Ergebnis (**) aus (5) ein (zur Erinnerung: das Ergebnis galt für *beliebige* natürliche Zahlen b, es muss also auch für die Zahl b gelten, die nun bei π im Nenner steht):

$$I_{b,n} = 2(2n-1)\cdot b^2\cdot I_{b,n-1} - \left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot b^4\cdot\ I_{b,n-2} = 2(2n-1)\cdot b^2\cdot I_{b,n-1} - a^2\cdot b^2\cdot I_{b,n-2}.$$

Wir wissen aber schon aus (4), dass $I_{b,1}$ und $I_{b,0}$ sicher ganze Zahlen sind. Damit können wir nun weiterrechnen:

$$I_{b,2} = 2\cdot(2\cdot 2-1)\cdot b^2\cdot I_{b,1} - a^2\cdot b^2\cdot I_{b,0};$$

weil alle Faktoren hier ganze Zahlen sind, folgt, dass auch $I_{b,2}$ eine ganze Zahl sein muss. Weiter:

$$I_{b,3} = 2\cdot(2\cdot 3-1)\cdot b^2\cdot I_{b,2} - a^2\cdot b^2\cdot I_{b,1};$$

weil alle Faktoren hier ganze Zahlen sind, folgt, dass auch $I_{b,3}$ eine ganze Zahl sein muss. Das können wir nun immer so weitermachen; letztlich ergibt sich: **Alle $I_{b,n}$ sind ganze Zahlen, für beliebig große Werte von n.** Diese Erkenntnis nennen wir (II).

So, und damit sind wir fertig! Denn zur Erinnerung: Ganz am Anfang, auf Seite 2, hatten wir die Erkenntnis (I): Wenn man n genügend groß wählt, dann ist $I_{b,n}$ irgendwann **keine** ganze Zahl mehr. Das steht offensichtlich im Widerspruch zur Erkenntnis (II)! Also muss irgendwo in den Rechnungen und Gedankenschritten ein Fehler sein. Wenn man alles nochmal durchrechnet (machen Sie mal), dann stellt man hoffentlich fest, dass nirgends ein Rechenfehler gemacht wurde. Also muss der Fehler in unserer Annahme stecken, dass π eine rationale Zahl wäre. Diese Annahme muss falsch sein – das heißt, **π ist irrational**.