

Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Björn Feuerbacher
aus Heidenheim

1999

**Optimierte δ -Entwicklung in skalarer
Feldtheorie und Quantenelektrodynamik
mit nichtlokaler interpolierender Wirkung**

Die Diplomarbeit wurde von Björn Feuerbacher ausgeführt am
Institut für Theoretische Physik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. D. Gromes

„Ein etwas vorschnippischer Philosoph, ich glaube Hamlet Prinz von Dänemark, hat gesagt, es gebe eine Menge Dinge im Himmel und auf der Erde, wovon nichts in unseren Kompendien stehe. Hat der einfältige Mensch, der bekanntlich nicht recht bei Trost war, damit auf unsere Kompendien der Physik gestichelt, so kann man ihm getrost antworten: gut, aber dafür stehen auch wieder eine Menge Dinge in unseren Kompendien, wovon weder im Himmel noch auf der Erde etwas vorkommt.“

Georg Christoph Lichtenberg

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die optimierte δ -Entwicklung, eine Kombination aus Variations- und Störungsrechnungsmethoden, auf die skalare Feldtheorie und die Quantenelektrodynamik angewandt. Die Wirkung wird in einen freien und einen Wechselwirkungsteil aufgespalten, wobei ein Parameter δ eingeführt wird, der zwischen einer freien Theorie ($\delta = 0$) und der exakten Wirkung ($\delta = 1$) interpoliert. Außerdem werden in den freien Teil ein bzw. zwei Formfaktoren für die Propagatoren eingeführt. Es wird nach δ entwickelt, dann wird $\delta = 1$ gesetzt, und anschließend wird mittels zweier Methoden versucht, ein optimales Ergebnis für die Formfaktoren zu finden: PMS (*Principle of Minimal Sensitivity*): die Ergebnisse sollen möglichst wenig vom Formfaktor abhängen; und FAC (*Fastest Apparent Convergence*): die Ergebnisse sollen sich nicht ändern, wenn man zu höheren Ordnungen in der Störungsreihe übergeht. Diese Vorgehensweise wird bei beiden Theorien sowohl auf die renormierten Propagatoren als auch auf die Betafunktion und die anomalen Dimensionen angewandt. Dabei treten allerdings Probleme auf: Man muß eine sehr spezielle Aufspaltung der Wirkung wählen, um die renormierten Propagatoren endlich zu machen; dies gelingt allerdings nur in der skalaren Theorie. Bei einigen der berechneten Größen kann PMS nicht angewandt werden, da diese nur linear von dem Formfaktor abhängt; bei anderen liefert es unphysikalische Ergebnisse. Dagegen könnte FAC in höheren Ordnungen interessante Resultate ergeben.

Abstract

Optimized δ -expansion in scalar field theory and quantum electrodynamics with non-local interpolating action: In this work, the optimized δ -expansion, a combination of variational and perturbative methods, is applied to the scalar field theory and quantum electrodynamics. The action is split into a free and an interacting part, introducing a parameter δ which interpolates between a free theory ($\delta = 0$) and the exact action ($\delta = 1$). Additionally, one respectively two form factors for the propagators are introduced in the free part. An expansion in δ is made, δ is set to 1, and then one tries to find an optimal result for the form factors by applying two methods: PMS (*principle of minimal sensitivity*): the results should depend as little as possible on the form factor; and FAC (fastest apparent convergence): the results shouldn't change when one goes to higher orders in the perturbation series. These methods are applied to the renormalized propagators and to the beta function and the anomalous dimensions in both cases. But problems appear in the calculations: To get finite renormalized propagators, one has to choose a very special splitting of the action; but this works only in the scalar theory. One cannot apply PMS in some cases because the results depend only linearly on the form factor; in some other cases, it produces unphysical results. In contrast, FAC could provide interesting results in higher orders.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Skalares Feld	9
2.1	Allgemeines	9
2.2	Renormierung des Propagators	11
2.3	Anwendung von PMS und FAC	13
2.4	φ^3 -Theorie	14
2.5	Betafunktion und anomale Dimension	18
3	Quantenelektrodynamik	23
3.1	Die Wirkung	23
3.2	Vakuumpolarisation	26
3.3	Selbstenergie des Elektrons	29
3.4	Kopplungskonstanten-Renormierung	31
3.5	Renormierung der Propagatoren	32
3.5.1	Photonpropagator	33
3.5.2	Elektronpropagator	33
3.6	Allgemeines zur Optimierung der Propagatoren	33
3.6.1	Photonpropagator	33
3.6.2	Elektronpropagator	34
3.7	Elektron-Photon-Vertex bis zur Ordnung δ^3	35
3.8	Betafunktion und anomale Dimensionen	38
4	Zusammenfassung	43
A	Selbstenergie des skalaren Feldes	47
B	Lösung der Integralgleichung	51

Kapitel 1

Einleitung

In vielen Bereichen der Physik treten Störungsreihen auf, die nur asymptotische Reihen sind, statt gegen das tatsächliche Ergebnis zu konvergieren, oder die gar divergieren. Ein Beispiel aus der Quantenmechanik sind die Energieniveaus des anharmonischen Oszillators, in der Quantenfeldtheorie hat man bei nahezu jeder Störungsreihe dieses Problem. Ein Lösungsansatz sind Resummationsverfahren, um die Reihe konvergent zu machen; eine andere Möglichkeit ist es, nach einem anderen Parameter als dem zunächst offensichtlichen zu entwickeln (beim anharmonischen Oszillator: Größe des Störterms; in der Quantenfeldtheorie: Kopplungskonstanten).

Hier setzt die *optimierte δ -Entwicklung* an; sie ist eine Kombination aus Störungs- und Variationsrechnung. Ausgangspunkt ist das Wirkungsfunktional (manchmal auch der Hamiltonoperator): Man spaltet es auf in einen “freien” Teil, der im Pfadintegral-Formalismus ausintegriert werden kann, und in einen “Wechselwirkungs”-Teil mit einem künstlich eingeführten Parameter δ , der anschließend als Entwicklungsparameter für eine Störungsreihe dient. Die Aufspaltung wird so vorgenommen, daß man für $\delta = 0$ den freien Teil der Wirkung und für $\delta = 1$ die ursprüngliche Wirkung erhält; mittels des Parameters δ wird also zwischen einer freien und der eigentlich interessierenden Wirkung interpoliert. Beliebige interessierende Größen können nun näherungsweise berechnet werden, indem man bis zur gewünschten Ordnung nach δ entwickelt und anschließend $\delta = 1$ setzt.

Um sicherzustellen, daß das Näherungsergebnis dieser Ordnung möglichst gut mit dem tatsächlichen Ergebnis übereinstimmt, werden Methoden der Variationsrechnung benutzt. Hierfür führt man in der Wirkung noch zusätzliche Parameter λ_i ein, die sich allerdings für $\delta = 1$ wieder herauskürzen müssen. Diese Parameter kann man nun zur Optimierung des Ergebnisses benutzen.

Im wesentlichen existieren zwei verschiedene Verfahren zur Wahl der “optimalen” Ergebnisse: eine Möglichkeit besteht darin, zu verlangen, daß sich das Ergebnis nicht ändert, wenn man auch noch höhere Ordnungen in der Störungsreihe berücksichtigt. Man stellt also die Forderung, daß die Ergebnisse in Ordnung n und in Ordnung $n+1$ übereinstimmen sollen und erhält daraus dann die “optimalen” Werte für die Parameter λ_i . Diese Methode heißt *Fastest Apparent Convergence* (FAC).

Andererseits kann man aber auch fordern, daß das Ergebnis möglichst wenig von der Wahl der Parameter abhängt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn alle Ableitungen der interessierenden Größe nach den Parametern verschwinden. Dies nennt man das *Principle of Minimal Sensitivity* (PMS).

Bei beiden Methoden ergeben sich die Parameter λ_i als nichtlineare Funktionen der Kopplungskonstante — auf diese Weise bekommt man dann also ein nicht-perturbatives Ergebnis. Im allgemeinen wird man in Abhängigkeit von der betrachteten Größe und der benutzten Ordnung der Störungstheorie aber jeweils unterschiedliche Werte für die Parameter erhalten.

Im folgenden sollen diese Methoden am Beispiel des anharmonischen Oszillators ([1],[2]) kurz dargestellt werden. Der Hamiltonoperator ist:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + m^2x^2) + \frac{1}{4}gx^4 \quad (1.1)$$

Die übliche Störungsreihe in g divergiert. Als Alternative wurde in [1] folgender Ansatz gemacht:

$$H = H_0 + \delta H_I \equiv \frac{g}{4} \left(x^2 + \frac{p^2}{\Omega^2} \right)^2 + \delta \left\{ \frac{1}{2}(p^2 + m^2x^2) + \frac{g}{4} \left[x^4 - \left(x^2 + \frac{p^2}{\Omega^2} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.2)$$

Der freie Teil des Hamiltonoperators ist dann gerade ein quadrierter harmonischer Oszillator mit dem künstlich eingeführten Frequenzparameter Ω , der Wechselwirkungsteil hat als “Kopplungskonstante” den künstlichen Parameter δ , nach dem im folgenden entwickelt wird. Für $\delta = 1$ erhält man wieder den ursprünglichen Hamiltonoperator. In der ursprünglichen Arbeit wurde der Parameter δ nicht verwendet bzw. von vornherein mit $\delta = 1$ gerechnet; seine Verwendung macht die Störungsrechnung aber transparenter — man sieht immer sofort, bis zu welcher Ordnung entwickelt wird.

Die Grundzustandsenergie ergibt sich dann (mit dem dimensionslosen Parameter $Z := \Omega^3/g$) zu:

$$E_0 = \frac{g^{1/3}}{Z^{2/3}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] + \delta \left[\frac{1}{4}Z - \frac{1}{16} \right] - \delta^2 \left[\frac{\left((Z - \frac{3}{2}) \right)^2}{48} + \frac{3}{640} \right] \right\} + O(\delta^3) \quad (1.3)$$

Um Z und damit Ω festzulegen, setze zunächst $\delta = 1$ und wende dann FAC oder PMS an. Bei ersterem fordere, daß die Korrekturen zur nullten Ordnung verschwinden; dies führt auf $Z = 0.25$ bei Einbeziehung der ersten Ordnung oder auf $Z = 0.374$, wenn man auch die zweite Ordnung dazunimmt. Man erhält dann $E_0 = 0.630g^{1/3}$ bzw. $E_0 = 0.481g^{1/3}$. Bei PMS dagegen fordere, daß die Abhängigkeit von E_0 von Z so “flach” wie möglich ist, d.h., daß die Ableitung nach Z verschwinden soll. Dies ergibt $Z = 1.5$ in erster Ordnung und in der zweiten Ordnung die beiden Lösungen $Z = 1.3719$ und $Z = 2.3781$; zwischen diesen beiden Punkten ändert sich die Energie nur um etwa 0.2 Prozent. Die Energien sind dann $E_0 = 0.429g^{1/3}$ bzw. $E_0 = 0.426g^{1/3}$.

Zum Vergleich: Die exakte Grundzustandsenergie ergibt sich numerisch zu $E_0/g^{1/3} \approx 0.420805$. PMS liefert also hier weit bessere Resultate als FAC.

Beide Optimierungsmethoden sind schon relativ alt und wurden bereits vor der optimierten δ -Entwicklung eingeführt. FAC wurde das erste Mal 1980 in [1] von I. G. Halliday und P. Suranyi für den anharmonischen Oszillator verwendet, PMS 1981 in [2] von P. M. Stevenson; die beiden Bezeichnungen wurden in zweiterem geprägt. In [1] wurde ein künstlicher Frequenzparameter eingefügt und ein “optimaler” Wert für ihn ermittelt (s. obiges Beispiel), in [2] wurde die Abhängigkeit physikalischer Größen vom Renormalisierungsschema ausgenutzt und mittels der freien Parameter die Größen optimiert. In der Folgezeit wurde PMS auch auf die φ^4 -Theorie angewendet, wobei eine effektive Masse als Variationsparameter benutzt wurde; dies wird auch als “Gaussian effective potential” bezeichnet ([3]).

Die δ -Entwicklung wurde dann 1988 von C. M. Bender et al. ([4]) eingeführt und auf die $\varphi^{2(1+\delta)}$ -Theorie angewendet, vorläufig noch ohne zusätzliche Parameter zur Optimierung. Im Gegensatz zur heutigen Verfahrensweise hatte man dort also eine nichtlineare Interpolation. In [5] wurde PMS auf dieses Modell angewandt. Die heute gebräuchlichste Form der optimierten δ -Entwicklung, in der mittels des Parameters δ linear interpoliert wird, wurde in [6] erstmals für das Gross-Neveu-Modell und auf Eichtheorien auf dem Gitter benutzt; als Optimierungskriterium wurde dort ein größtmöglicher Konvergenzradius für die Störungsreihe in δ benutzt. Einen Review zu diesen Entwicklungen findet man in [7].

Anwendungen in der Quantenfeldtheorie waren seitdem vor allem das schon genannte “Gaussian effective potential” (für neuere Referenzen hierzu siehe [10]). Eine andere Möglichkeit findet man in [8]: die gesamte Lagrangefunktion wurde mit einer Konstanten multipliziert und diese Konstante dann optimiert. Das Verfahren wurde auf die φ^4 -Theorie, die Quantenelektrodynamik und die Yang-Mills-Theorie angewandt; bei der Renormierung kürzte sich die Konstante heraus, es ergaben sich aber interessante Zusammenhänge zwischen den renormierten und nackten Kopplungskonstanten.

Ein Beweis, daß die optimierte δ -Entwicklung tatsächlich konvergiert und vernünftige Ergebnisse liefert, wurde in [9] für den Fall des anharmonischen Oszillators ausgeführt. Dort wurde auch gesagt, daß das benutzte Interpolationsschema für Anwendungen in der Quantenfeldtheorie nur von beschränktem Nutzen ist und daß man dafür eine bessere Interpolation finden sollte. Dies führte zu dem Ansatz, den freien Anteil der Wirkung in der allgemeinst möglichen Form zu schreiben — ein nichtlokaler quadratischer Term mit einem beliebigen Formfaktor. Statt einer Anzahl von Parametern wird also eine Funktion zur Optimierung verwendet; PMS führt damit auf Funktionalableitungen. Dieser Ansatz wurde in [10] von D. Gromes auf die Quantenchromodynamik ohne Quarks angewandt:

Durch das Einfügen eines Formfaktors $K(x - y)$ wird die Wirkung nicht-lokal; um Eichinvarianz zu gewährleisten, muß dann zusätzlich noch ein pfadgeordneter Exponentialfaktor eingeführt werden. Dessen Entwicklung nach δ ergibt dann zusätzliche Stringterme in der Wirkung. Im folgenden wurde dann die Vakuumpolarisation für die Gluonen, die Selbstenergie der Geister und der Gluon-Geist-Vertex bis zur Ordnung δ^2 bzw. δ^3 berechnet. Die Renormierung der Propagatoren schien allerdings nicht machbar — für eine beliebige Funkti-

on sind die renormierten Größen nicht notwendigerweise endlich. Dies resultiert letztlich daraus, daß die Wirkung nicht renormierbar ist, wenn man δ als Kopplungskonstante auffaßt.

Um die Probleme mit den Divergenzen zu vermeiden, wurden die Betafunktion und die anomalen Dimensionen berechnet. Hier tauchten aber Probleme bei der Optimierung auf: FAC kann in dieser Ordnung nicht angewendet werden, da es die niedrigste nichttriviale Ordnung ist. PMS gibt für γ_{ghost} keine Lösung, da in diesem der Formfaktor nur linear auftritt, für γ_{gluon} und β ergibt sich zwar eine Lösung, allerdings nicht die der normalen Störungstheorie niedrigster Ordnung $K(x-y) = \delta(x-y)$. Außerdem sind die Lösungen in dieser Ordnung unabhängig von der Kopplungskonstante g , so daß man auch im Limes kleiner Kopplungskonstante nicht das erwartete Ergebnis der üblichen Störungstheorie erhält.

Es ist bekannt, daß die niedrigste nichttriviale Ordnung i.a. kein vernünftiges Extremum liefert. Also wurden die Effekte der nächsthöheren Ordnung in δ (aber nicht die Zwei-Loop-Beiträge, die erst bei der nächsthöheren Ordnung in g auftauchen würden) zusätzlich berücksichtigt. FAC führt dann auf das erwartete Ergebnis der üblichen Störungstheorie, die Einbeziehung der Zwei-Loop-Beiträge würde also ein nichttriviales nicht-perturbatives Ergebnis bringen, das im Limes kleiner Kopplungskonstante gegen das der üblichen Störungstheorie geht. PMS gibt allerdings immer noch kein vernünftiges Ergebnis: γ_{ghost} ist nun vom Formfaktor unabhängig, so daß man dort überhaupt keine Lösung erhält, bei γ_{gluon} und β stören immer noch lineare Beiträge. Im folgenden wurde dann noch ausgeführt, daß das Versagen von PMS für kleines g in jeder Ordnung in δ auftritt — PMS ist hier also anscheinend überhaupt nicht anwendbar !

Obwohl die gesamte Rechnung ohne Quarks durchgeführt wurde, waren die einzelnen Rechenschritte teilweise sehr aufwendig — beispielsweise mußten schon in dieser niedrigen Ordnung 28 Feynmandiagramme berechnet werden. Dies resultiert letztlich daraus, daß die Quantenchromodynamik eine nichtabelsche Eichtheorie, also eine relativ komplizierte Quantenfeldtheorie ist. Der Gedanke liegt also nahe, dieselben Rechnungen an einfacheren Quantenfeldtheorien auszuprobieren und so vielleicht Einsicht in den Ursprung der erwähnten Probleme und mögliche Lösungen zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit wird dies durchgeführt:

Zunächst (Kap. 2) wird die skalare Feldtheorie betrachtet, am Anfang allgemein (Abschnitte 2.1 bis 2.3) und schließlich konkret die φ^3 -Theorie (Abschn. 2.4) in sechs Dimensionen (dort ist sie gerade noch renormierbar). Dies ist zwar eine unphysikalische Theorie, da der Hamiltonoperator nach unten unbeschränkt ist, doch sie eignet sich gut als einfaches Spielmodell, um die Methoden auszuprobieren. Es stellt sich heraus, daß in diesem Fall der Propagator renormiert werden kann, wenn man die Kopplungskonstante von vornherein mit einem Faktor modifiziert, der von dem Impuls abhängt, bei dem man optimieren will (Abschn. 2.2). Eine Anwendung von PMS auf den renormierten Propagator schlägt fehl, es gibt keine Lösung; FAC führt auf eine Integralgleichung vom Schwinger-Dyson-Typ (Abschn. 2.3). Diese Integralgleichung wird

iterativ numerisch gelöst; man erhält dann ein nicht-perturbatives Ergebnis für den Propagator, das sich geringfügig vom Ergebnis der üblichen Störungstheorie unterscheidet (Abschn. 2.4). Zum Abschluß wird auch noch die Anwendung auf die Betafunktion und die anomale Dimension untersucht.

Um einen besseren Vergleich mit der Quantenchromodynamik zu ermöglichen, ist es aber sinnvoller, eine Eichtheorie zu untersuchen. Dies geschieht in Kap. 3; dort wird die Quantenelektrodynamik betrachtet. Allerdings müssen hier die Fermionen (hier: Elektronen) natürlich mit behandelt werden, da im Gegensatz zur Quantenchromodynamik keine Selbstkopplung der Eichbosonen (hier: Photonen) existiert und die Theorie ohne Fermionen trivial wäre. Dadurch werden die Rechnungen doch deutlich anders als in der reinen Yang-Mills-Theorie: Man hat nun zwei Formfaktoren, jeweils einen für die Elektronen und für die Photonen. Wie in der Yang-Mills-Theorie benötigt man wieder einen zusätzlichen Exponentialfaktor, um Eichinvarianz zu gewährleisten. Dessen Entwicklung ergibt wiederum zusätzliche Stringterme (Abschn. 3.1). Es wird dann die Vakuumpolarisation berechnet und deren Transversalität gezeigt (Abschn. 3.2); weiterhin wird die Selbstenergie der Elektronen berechnet (Abschn. 3.3). Nach der Renormierung der Ladung und der Überprüfung der Ward-Identität (Abschn. 3.4) wird dann gezeigt, wie man (mittels einer Modifizierung der Kopplungskonstanten äquivalent zum Vorgehen in der skalaren Theorie) die renormierten Größen auf die übliche Form bringen kann (Abschn. 3.5). Im folgenden wird dann untersucht, welche Ergebnisse die Anwendung von FAC und PMS auf die renormierten Propagatoren liefert. Es stellt sich jedoch heraus, daß auch hier, wie in der Quantenchromodynamik, die renormierten Größen nicht endlich sind (Abschn. 3.6). Um diese Probleme zu vermeiden, werden wiederum die Betafunktion und die anomalen Dimensionen berechnet (Abschn. 3.8); zuvor benötigt man allerdings noch den Elektron-Photon-Vertex bis zur Ordnung δ^3 (Abschn. 3.7). Auch hier treten viele Feynmandiagramme auf; die meisten davon heben sich allerdings gegenseitig weg oder tragen zumindest zu den Renormierungskonstanten nicht bei.

Kapitel 2

Skalares Feld

2.1 Allgemeines

Für ein skalares Feld mit Selbstwechselwirkung hat man die folgende Wirkung:

$$S = - \int \left[\frac{1}{2} \varphi(x) (\square + M_0^2) \varphi(x) + \frac{g_0}{r!} \varphi^r(x) \right] dx. \quad (2.1)$$

Schreibe sie nun in folgender Weise um:

$$S = S_0 + \delta S_I \quad (2.2)$$

mit

$$S_0 = \frac{1}{2} \int \int \varphi(x) F(x-y) \varphi(y) dx dy \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} S_I = & -\frac{1}{2} \delta \int \int \varphi(x) \left[\delta(x-y) (\square + M^2) + F(x-y) \right] \varphi(y) dx dy \\ & + \frac{1}{2} \delta \left[M^2 - M_1^2(q^2) + \delta \left(M_1^2(q^2) - M_0^2 \right) \right] \int \varphi^2(x) dx \\ & - \frac{g_0}{r!} \left[\zeta(q^2)^{-1/2} + \delta^2 \left(1 - \zeta(q^2)^{-1/2} \right) \right] \int \varphi^r(x) dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hier ist δ unser Entwicklungsparameter; die freie Lagrangefunktion ist in der allgemeinsten Lorentz-invarianten Form gewählt, indem ein Formfaktor $F(x-y)$ eingeführt wurde. Zusätzlich wird die Kopplung durch eine impulsabhängige Funktion ζ modifiziert (wobei q^2 der Impuls ist, für den später der Propagator optimiert werden soll), und ein Massen-Counterterm wird eingeführt, wobei ebenfalls eine mögliche Abhängigkeit von q^2 berücksichtigt wird. Diese im Moment noch beliebig wählbaren Funktionen werden im Laufe der Renormierung benötigt, damit der Propagator endlich wird.

Aus dieser Wirkung erhält man dann den nackten Propagator $D(q^2)$ als das Inverse der Fouriertransformierten des Formfaktors:

$$D(q^2) = \frac{1}{\tilde{F}(q^2)}. \quad (2.5)$$

Da die Massenrenormierung mit dem obigen Counterterm gleich explizit durchgeführt werden soll, kann man verlangen, daß dieser Propagator seinen Pol bei

Abbildung 2.1: Einteilchen-irreduzible Anteile im Propagator

der physikalischen Masse M hat:

$$D(q^2) = \frac{z(q^2)}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (2.6)$$

mit $z(M^2) \neq 0$.

Die Feynmanregeln ändern sich wie folgt: Der übliche nackte Propagator wird mit einem Faktor $z(q^2)$ multipliziert, die Masseneinfügung \times wird $\delta^2 (M^2 - M_1^2(q^2)) + \delta^3 (M_1^2(q^2) - M_0^2)$, der Dreiervertex bekommt einen Faktor $\delta\zeta(q^2)^{-1/2} + \delta^3(1 - \zeta(q^2)^{-1/2})$, und man hat einen zusätzlichen Zweiervertex \bullet aus dem ersten Integral in S_I . Die Potenzen von δ in S_I sind gerade so gewählt, daß man die ersten Korrekturen zum nackten Propagator in der Ordnung δ^2 erhält, in Übereinstimmung mit der üblichen Störungstheorie, in der man die ersten nichttrivialen Korrekturen in Ordnung g_0^2 erhält.

Die Einteilchen-irreduziblen Anteile zur Selbstenergie (Abb.2.1) bis zur Ordnung δ^2 ergeben:

$$\delta^2 \left[(-q^2 + M^2) + \frac{1}{D(q^2)} + \alpha_0 \frac{\Sigma(q^2)}{\zeta(q^2)} - (M^2 - M_1^2(q^2)) \right] =: \delta^2 \bar{\Sigma}(q^2). \quad (2.7)$$

Man erhält sie mittels der Standardmethoden des Pfadintegral-Formalismus: Aus dem erzeugenden Funktional für zusammenhängende Graphen ergeben sich die Graphen, die zum vollen Propagator $\Delta(q^2) = 1/(q^2 - M^2 - \delta^2 \bar{\Sigma}(q^2))$ beitragen, und daraus dann die irreduziblen Anteile. Die Rechnungen funktionieren genauso wie in der üblichen Störungstheorie, nur daß nun nach δ statt nach g_0 entwickelt wird.

Die ersten beiden Summanden stammen aus dem ersten Integral in S_I . Bei der Selbstenergie Σ , die für $r = 3$ oder $r = 4$ nur einen Graphen mit $r-1$ inneren Linien enthält (Tadpoles werden durch Massenrenormierung absorbiert), wurde ein Faktor $\delta^2 \alpha_0 / \zeta(q^2)$ abgespalten, wobei

$$\alpha_0 = \frac{g_0^2}{2(4\pi)^{d/2} M^{d(2-r)+2r}} \quad (2.8)$$

für jede beliebige Raumzeit-Dimension d dimensionslos ist.

Die Massenrenormierung kann nun sofort durchgeführt werden, indem man verlangt, daß der Counterterm $M^2 - M_1^2(q^2)$ identisch mit $\alpha_0 \Sigma(M^2) / \zeta(q^2)$ ist. Naheliegender wäre natürlich die schwächere Forderung $M^2 - M_1^2(M^2) =$

$\alpha_0 \Sigma(M^2)/\zeta(q^2)$; es stellt sich aber heraus, daß dies im Laufe der Renormierung auf das unsinnige Ergebnis $z'(q^2) \equiv \text{const.}$ führen würde.

Man erhält dann den Propagator zur Ordnung δ^2 durch das übliche Aufsummieren der geometrischen Reihe als

$$\begin{aligned} \Delta(q^2) &= D(q^2) \left[1 + \delta^2 \bar{\Sigma}(q^2) D(q^2) + \delta^4 \bar{\Sigma}(q^2) D(q^2) \bar{\Sigma}(q^2) D(q^2) + \dots \right] \\ &= \frac{z(q^2)}{[1 - \delta^2(1 - z(q^2))](q^2 - M^2 + i\epsilon) - \delta^2 \alpha_0 [\Sigma(q^2) - \Sigma(M^2)] \frac{z(q^2)}{\zeta(q^2)}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\stackrel{\delta \equiv 1}{=} \frac{1}{q^2 - M^2 + i\epsilon - \alpha_0 [\Sigma(q^2) - \Sigma(M^2)] / \zeta(q^2)} \quad (2.10)$$

Im folgenden wird angenommen, daß die Lösung die richtigen analytischen Eigenschaften haben wird. Schreibe deshalb für $z(q^2)$ die bei der physikalischen Masse einfach subtrahierte Dispersionsrelation

$$z(q^2) = z(M^2) \left[1 + (q^2 - M^2) \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\rho(m^2) dm^2}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (2.11)$$

Mit $\hat{\rho}(m^2) = \delta(m^2 - M^2) + \rho(m^2)$ ist dann der nackte Propagator

$$D(q^2) = z(M^2) \int_0^{\infty} \frac{\hat{\rho}(m^2) dm^2}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.12)$$

Man erhält also eine Källen-Lehmann-Darstellung des Propagators. Ein beliebiger Feynman-Graph kann nun berechnet werden, indem man jeden vorkommenden Propagator k für eine beliebige Masse m_k hinschreibt, mit $z(M^2) \hat{\rho}(m_k^2)$ multipliziert und zum Schluß über alle m_k^2 integriert.

Nun könnte man auf den obigen Propagator (2.10) FAC oder PMS anwenden. Letztendlich sind aber die physikalisch interessanten Größen die renormierten; man berechnet also zunächst den renormierten Propagator.

2.2 Renormierung des Propagators

Die Massenrenormierung wurde bereits durch den Counterterm durchgeführt, es gilt also $\Delta_{ren}^{-1}(M^2) = 0$. Nun muß noch die Wellenfunktion renormiert werden. Dazu stellt man wie üblich die Forderung:

$$\left. \frac{\partial \Delta_{ren}^{-1}(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=M^2} = 1. \quad (2.13)$$

Dies führt beim nackten Propagator auf

$$D_{ren}(q^2) = \frac{z(q^2)/z(M^2)}{q^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (2.14)$$

Die Normierung von $z(q^2)$ kürzt sich hier also heraus; im folgenden arbeite daher mit

$$z(M^2) = 1. \quad (2.15)$$

Für den vollen Propagator erhält man bis zur Ordnung δ^2 :

$$\Delta_{ren}(q^2) = Z^{-1}\Delta(q^2) = \frac{D(q^2)}{1 - \delta^2(1 - z(q^2)) - \delta^2\alpha_0\sigma(q^2)D(q^2)/\zeta(q^2)} \quad (2.16)$$

mit

$$\sigma(q^2) = \Sigma(q^2) - \Sigma(M^2) - (q^2 - M^2)\frac{\zeta(q^2)}{\zeta(M^2)z(q^2)}\Sigma'(M^2) \quad (2.17)$$

und der Renormierungskonstanten

$$Z = 1 + \delta^2\alpha_0\Sigma'(M^2)/\zeta(M^2). \quad (2.18)$$

Im Ausdruck für $\sigma(q^2)$ kürzt sich die Normierung von $\zeta(q^2)$ heraus; benutze im folgenden daher $\zeta(M^2) = 1$.

Da der Propagator nun renormiert ist, sollte $\sigma(q^2)$ endlich sein. Da $\sigma(M^2) = 0$, genügt es zu zeigen, daß die Ableitung von σ überall endlich ist.

$$\begin{aligned} \sigma'(q^2) &= \Sigma'(q^2) - \Sigma'(M^2) \left((q^2 - M^2)\frac{\zeta(q^2)}{z(q^2)} \right)' \\ &= \Sigma'(q^2) - \Sigma'(M^2) - \Sigma'(M^2) \left(\left((q^2 - M^2)\frac{\zeta(q^2)}{z(q^2)} \right)' - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wird die Raumzeit-Dimension d so gewählt, daß die übliche φ^r -Theorie renormierbar (aber noch nicht superrenormierbar) ist ($d = 2r/(r - 2)$), dann ist $\Sigma''(q^2)$ endlich, also auch $\Sigma'(q^2) - \Sigma'(M^2)$. Da dann aber $\Sigma'(M^2)$ logarithmisch divergiert, muß gelten:

$$\left((q^2 - M^2)\frac{\zeta(q^2)}{z(q^2)} \right)' = 1, \quad (2.20)$$

also

$$\zeta(q^2) = z(q^2). \quad (2.21)$$

und damit

$$\sigma(q^2) = \Sigma(q^2) - \Sigma(M^2) - (q^2 - M^2)\Sigma'(M^2) \quad (2.22)$$

$$\Delta_{ren}(q^2) = \frac{D(q^2)}{1 - \delta^2(1 - z(q^2)) - \delta^2\alpha_0\sigma(q^2)/(q^2 - M^2)}. \quad (2.23)$$

Nun ist noch die Renormierung der Kopplungskonstante durchzuführen. Bis zur Ordnung δ^2 ist nur der Dreiervertex mit der nackten Kopplung zu berücksichtigen. Man hat also dann

$$\begin{aligned} g &= Z^{3/2}g_0 \left(\delta\zeta(q^2)^{-1/2} + \delta^3(1 - \zeta(q^2)^{-1/2}) \right) \\ &= \frac{\delta g_0}{\sqrt{z(q^2)}} + O(\delta^3) \\ \delta^2\alpha_0 &= \alpha z(q^2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

(In den folgenden Rechnungen muß immer beachtet werden, daß α von der Ordnung δ^2 ist !)

Der renormierte Propagator, ausgedrückt in renormierten Größen, ist also

$$\Delta_{ren}(q^2) = \frac{D(q^2)}{1 - \delta^2(1 - z(q^2)) - \alpha\sigma(q^2)D(q^2)}. \quad (2.25)$$

2.3 Anwendung von PMS und FAC

Das *principle of minimal sensitivity* verlangt, daß die physikalisch interessierende Größe so wenig wie möglich von dem künstlich eingeführten Formfaktor $F(x-y)$, also von $z(q^2)$, abhängen soll. Dies erreicht man durch die Forderung, daß die Variation dieser Größe nach z verschwinden soll. Um die Analytizitätseigenschaften von $z(q^2)$ zu bewahren, ist es allerdings sinnvoller, die Spektraldarstellung (2.11) zu verwenden. Hier interessieren wir uns für den renormierten Propagator; es muß also gelten:

$$\frac{\delta\Delta_{ren}(q^2)}{\delta\rho(p^2)} = 0 \quad \forall p^2 \geq 4M^2. \quad (2.26)$$

Setze zunächst in der obigen Form (2.25) $\delta = 1$:

$$\Delta_{ren}(q^2) = \frac{D(q^2)}{z(q^2) - \alpha\sigma(q^2)D(q^2)} = \frac{1}{(q^2 - M^2 + i\epsilon) - \alpha\sigma(q^2)}. \quad (2.27)$$

Die z -Abhängigkeit des Propagators steckt also nur noch in σ ; da dieses z (und damit auch ρ) quadratisch enthält, würde die obige Bedingung auf das unsinnige Ergebnis $z \equiv 0$ führen. Betrachte daher die n -te Potenz des Propagators:

$$\begin{aligned} \Delta_{ren}^n(q^2) &= \frac{D^n(q^2)}{1 - n\delta^2(1 - z(q^2)) - n\alpha\sigma(q^2)D(q^2)} \\ &\stackrel{\delta=1}{=} \frac{z^n(q^2)/(q^2 - M^2 + i\epsilon)^n}{1 - n + nz(q^2) - n\alpha\sigma(q^2)z(q^2)/(q^2 - M^2 + i\epsilon)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

und fordere nun, daß

$$\frac{\delta\Delta_{ren}(q^2)}{\delta\rho(p^2)} = 0 \quad \forall p^2 \geq 4M^2. \quad (2.29)$$

Dies führt auf (für $z(q^2) \neq 0$)

$$z(q^2) - 1 = \alpha z(q^2) \left(\frac{\sigma(q^2)}{q^2 - M^2 + i\epsilon} - \frac{z(q^2)}{n-1} \frac{q^2 - p^2}{(q^2 - M^2 + i\epsilon)^2} \frac{\delta\sigma(q^2)}{\delta\rho(p^2)} \right) \quad \forall p^2 \geq 4M^2. \quad (2.30)$$

Also muß gelten:

$$z(q^2) - 1 = \alpha z(q^2) \left(\frac{\sigma(q^2)}{q^2 - M^2 + i\epsilon} - c(q^2) \right) \quad (2.31)$$

$$c(q^2) = \frac{z(q^2)}{n-1} \frac{q^2 - p^2}{(q^2 - M^2 + i\epsilon)^2} \frac{\delta\sigma(q^2)}{\delta\rho(p^2)}. \quad (2.32)$$

Für $q^2 \geq 4M^2$ kann man $p^2 = q^2$ wählen und erhält dann $c(q^2) = 0$. Zunächst wäre nun also (2.31) zu lösen, dann müßte man damit in (2.32) eingehen. Für $q^2 \geq 4M^2$ müßte die rechte Seite verschwinden, für $q^2 < 4M^2$ muß das Ergebnis zumindest unabhängig von p^2 sein. Dies ist allerdings nicht erfüllbar, also wäre das einzig mögliche Ergebnis bei PMS das schon oben erwähnte unsinnige $z \equiv 0$.

Die Forderung der *fastest apparent convergence* besagt, daß jeweils die Näherung in m -ter Ordnung mit der in $(m - 1)$ -ter Ordnung übereinstimmen soll. Da wir uns für den renormierten Propagator interessieren und ihn bis zur niedrigsten nichttrivialen Ordnung (δ^2) ausgerechnet haben, muß hier also gelten:

$$D_{ren}(q^2) = \Delta_{ren}(q^2). \quad (2.33)$$

Dies führt auf

$$z(q^2) - 1 = \alpha \frac{\sigma(q^2)}{q^2 - M^2 + i\epsilon} z(q^2), \quad (2.34)$$

also auf dasselbe Ergebnis wie PMS für $q^2 \geq 4M^2$, allerdings nun ohne die Nebenbedingung (2.32). Benutzt man stattdessen wie oben die n -te Potenz des Propagators, würde man ein anderes Ergebnis erwarten, da alle Rechnungen ja nicht exakt, sondern nur bis zur Ordnung δ^2 durchgeführt werden. Nach kurzer Rechnung erhält man jedoch wiederum dieselbe Gleichung.

2.4 φ^3 -Theorie

Das einfachste, wenn auch unphysikalische (da der Hamiltonoperator nach unten unbeschränkt ist), Beispiel für die Anwendung dieser Formeln bietet die φ^3 -Theorie. Hier besteht $\Sigma(q^2) - \Sigma(M^2)$ nur aus einem Loop-Graphen, der relativ einfach berechnet werden kann. Für $d < 6$ ist diese Theorie superrenormierbar, der Graph ist konvergent. Strebt d gegen sechs, so tritt eine logarithmische Divergenz auf, die aber dann durch die logarithmische Divergenz in $\Sigma'(M^2)$ kompensiert wird, so daß $\sigma(q^2)$ endlich bleibt. Man kann für $\Sigma(q^2)$ eine einfach subtrahierte Dispersionsrelation aufstellen:

$$\Sigma(q^2) = \Sigma(M^2) + (q^2 - M^2) \int_0^\infty dp^2 \int_0^\infty ds^2 \int_0^\infty dt^2 \frac{\Lambda(p^2, s^2, t^2) \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2)}{q^2 - p^2 + i\epsilon}. \quad (2.35)$$

Hierbei ist

$$\Lambda(p^2, s^2, t^2) = -\frac{1}{\alpha_0 \pi (p^2 - M^2)} \text{Im} \frac{i}{2} \begin{array}{c} k, s \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ p, M \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ p - k, t \end{array} \begin{array}{c} p, M \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ p, M \end{array} \quad (2.36)$$

symmetrisch in s^2 und t^2 . Der Loop-Graph wird dabei mit äußerem Impuls p und Masse M und inneren Impulsen und Massen k, s bzw. $p - k, t$ berechnet. Die allgemeine Rechnung in d Dimensionen ergibt dann (s. Anhang)

$$\Lambda(p^2, s^2, t^2) = \frac{-M^{6-d} 2^{3-d} \theta(p^2 - (s+t)^2)}{\sqrt{\pi} (p^2 - M^2) (p^2)^{d/2-1}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{d}{2} - \frac{1}{2})} (p^4 - 2p^2(s^2 + t^2) + (s^2 - t^2)^2)^{d/2-3/2} \quad (2.37)$$

$$\stackrel{d=6-2\epsilon}{=} \frac{\theta(p^2 - (s+t)^2)}{6p^4(p^2 - M^2)} (p^4 - 2p^2(s^2 + t^2) + (s^2 - t^2)^2)^{3/2}. \quad (2.38)$$

Für $d \rightarrow 6$ verhält sich $\Lambda(p^2)$ asymptotisch wie $(p^2)^0$ (allgemein: $(p^2)^{d/2-3}$), und (2.35) wird logarithmisch divergent, aber

$$\sigma(q^2) = -(q^2 - M^2)^2 \int \frac{\Lambda(p^2, s^2, t^2) \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) dp^2 ds^2 dt^2}{(q^2 - p^2 + i\epsilon)(M^2 - p^2 + i\epsilon)} \quad (2.39)$$

ist endlich.

Da der Träger von $\hat{\rho}$ aus M^2 und $[4M^2, \infty)$ besteht und Λ eine θ -Funktion enthält, gilt:

$$\Lambda(p^2, s^2, t^2) \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) = 0 \text{ für } p^2 \leq 4M^2. \quad (2.40)$$

Bei $p^2 = M^2$ tritt also im obigen Integral kein Pol auf, und man kann setzen:

$$K(p^2, s^2, t^2) = \frac{\Lambda(p^2, s^2, t^2)}{p^2 - M^2}, \quad (2.41)$$

also

$$\begin{aligned} \sigma(q^2) &= (q^2 - M^2)^2 \int \frac{K(p^2, s^2, t^2) \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) dp^2 ds^2 dt^2}{q^2 - p^2 + i\epsilon} \\ &= (q^2 - M^2)^2 \int \frac{\bar{K}(p^2) dp^2}{q^2 - p^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (2.42)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{K}(q^2) &:= \int_0^\infty \int_0^\infty K(q^2, s^2, t^2) \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) ds^2 dt^2 = K(q^2, M^2, M^2) \\ &+ 2 \int_{4M^2}^\infty ds^2 K(q^2, M^2, s^2) \rho(s^2) + \int_{4M^2}^\infty ds^2 \int_{4M^2}^\infty dt^2 K(q^2, s^2, t^2) \rho(s^2) \rho(t^2). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nehme nun auf beiden Seiten von (2.34) für $q^2 \geq 4M^2$ den Imaginärteil und löse nach $\text{Im } z(q^2)$ auf, dann folgt:

$$\text{Im } z(q^2) = \frac{\alpha \text{Im } \sigma(q^2) \text{Re } z(q^2)}{q^2 - M^2 - \alpha \text{Re } \sigma(q^2)}. \quad (2.44)$$

Benutzt man, daß

$$\frac{1}{z - z_0 + i\epsilon} = P \frac{1}{z - z_0} - i\pi \delta(z - z_0), \quad (2.45)$$

$$M^2 \rho(q^2)$$

$$q^2/M^2$$

Abbildung 2.2: Spektralfunktion $\rho(q^2)$ für den Propagator des Skalarfeldes

$$\text{Re } z(q^2)$$

$$q^2/M^2$$

Abbildung 2.3: Realteil des Formfaktors $z(q^2)$ für den Propagator des Skalarfeldes

so ergibt sich die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \rho(q^2) &= \alpha \frac{\bar{K}(q^2) \text{Re } z(q^2)}{1 - \alpha \frac{\text{Re } \sigma(q^2)}{q^2 - M^2}} \\ \text{Re } z(q^2) &= 1 + (q^2 - M^2) P \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\rho(p^2)}{q^2 - p^2} dp^2 \\ \text{Re } \sigma(q^2) &= (q^2 - M^2)^2 P \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\bar{K}(p^2)}{q^2 - p^2} dp^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die Integralgleichung (2.46) für ρ kann man nun iterativ numerisch lösen (näheres siehe Anhang); sogar für $\alpha = 1$ erhält man noch eine Lösung. In Abb. 2.2 ist der Verlauf von $\rho(q^2)$ dargestellt. Aus der Dispersionsrelation ergibt sich dann der Formfaktor $z(q^2)$; der Realteil wurde schon bei der iterativen Lösung

$$M^2 \rho^{(0)}(q^2)$$

$$q^2/M^2$$

Abbildung 2.4: Propagator-Spektralfunktion $\rho^{(0)}(q^2)$ in der üblichen Störungstheorie

ausgerechnet und ist in Abb. 2.3 dargestellt, den Imaginärteil erhält man einfach als $\text{Im } z(q^2) = -\pi(q^2 - M^2)\rho(q^2)$.

Aus der üblichen Störungstheorie (bis zur Ordnung g^2) erhält man geringfügig andere Ergebnisse. Der Propagator hat auf den ersten Blick dieselbe Gestalt wie oben:

$$\Delta_{ren}^{(0)}(q^2) = \frac{1}{(q^2 - M^2 + i\epsilon) - \alpha\sigma^{(0)}(q^2)}. \quad (2.47)$$

Die Selbstenergie $\sigma^{(0)}(q^2)$ ist jedoch nun ohne den Formfaktor $F(x-y)$ zu berechnen, also mit $z(q^2) = 1$ bzw. $\rho(q^2) = 0$. Wenn man bei der iterativen Lösung der obigen Integralgleichung mit $\rho(q^2) = 0$ beginnt, so erhält man $\sigma^{(0)}(q^2)$ also gleich bei der ersten Iteration.

Auch für diesen Propagator kann man eine Dispersionsrelation aufstellen:

$$\Delta_{ren}^{(0)}(q^2) = \frac{1}{q^2 - M^2 + i\epsilon} + \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\rho^{(0)}(m^2)dm^2}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.48)$$

Nimmt man von dieser Gleichung den Imaginärteil, so ergibt sich für $q^2 > 4M^2$:

$$-\pi\rho^{(0)}(q^2) = \text{Im} \frac{1}{q^2 - M^2 - \alpha\sigma^{(0)}(q^2)} \quad (2.49)$$

und damit schließlich

$$\rho^{(0)}(q^2) = -\frac{1}{\pi} \frac{\alpha \text{Im } \sigma^{(0)}(q^2)}{(q^2 - M^2 - \alpha \text{Re } \sigma^{(0)}(q^2))^2 + (\alpha \text{Im } \sigma^{(0)}(q^2))^2}. \quad (2.50)$$

$$M^2[\rho(q^2) - \rho^{(0)}(q^2)]$$

$$q^2/M^2$$

Abbildung 2.5: Differenz der Spektralfunktionen aus der optimierten und der normalen Störungstheorie

Das Ergebnis ist, wiederum für $\alpha = 1$, in Abb. 2.4 dargestellt — auf den ersten Blick sieht es genauso aus wie Abb. 2.2. Betrachtet man jedoch die Differenz (Abb. 2.5), so sieht man, daß kleine Unterschiede existieren.

2.5 Betafunktion und anomale Dimension

In Analogie zu [10] soll nun noch die Betafunktion und die anomale Dimension untersucht werden. Um diese zu berechnen, benötigt man die Renormierungskonstanten Z und Z_g ; diese wiederum erhält man mittels:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta^{-1}(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=M^2} &= Z^{-1} \\ \Gamma^{(3)}(p, k) \Big|_{p^2=M^2, k^2=0} &= -\delta g_0 Z_g^{-1}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

q ist hier der Impuls des Propagators, p und k sind die einlaufenden Impulse des Dreiervertexes.

Die konkrete Aufspaltung der Wirkung hängt von der Wahl der zu optimierenden Größe ab. Für die Optimierung des Propagators war die zusätzliche Einführung der Funktionen $\zeta(q^2)$ und $M_1(q^2)$ nötig, um die renormierten Größen endlich zu halten. Nun aber sollen andere Größen optimiert werden, und es besteht a priori keine Veranlassung, diese Funktionen auch hier wieder zu verwenden: Setze also $\zeta(q^2) \equiv 1$, $M_1(q^2) \equiv M_0$.

Die Normierung der Funktion $z(q^2)$ wird zunächst noch offen gelassen. Mittels des Ausdrucks (2.9) für den unrenormierten Propagator hat man dann

$$Z = z(M^2) \left(1 + \delta^2 (1 - z(M^2)) + \delta^2 \alpha_0 \Sigma'(M^2) z(M^2) \right). \quad (2.52)$$

Zur Selbstenergie trägt hier wiederum nur der Ein-Loop-Graph aus Abb. 2.1

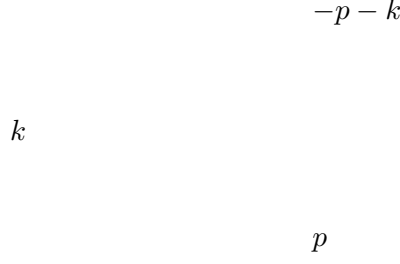


Abbildung 2.6: Ein-Loop-Beitrag zum Dreiervertex des skalaren Feldes (alle Impulse einlaufend)

bei; er ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
\Sigma(q^2) &= \frac{ig_0^2}{2(2\pi)^d \alpha_0} \int d^d k \frac{z(k^2)}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \frac{z((q+k)^2)}{(q+k)^2 - M^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{iM^{6-d} z^2(M^2)}{\pi^{d/2}} \int ds^2 dt^2 \int d^d k \frac{\hat{\rho}(s^2)}{k^2 - s^2 + i\epsilon} \frac{\hat{\rho}(t^2)}{(q+k)^2 - t^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{iM^{6-d} z^2(M^2)}{\pi^{d/2}} \int ds^2 dt^2 \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) \int_0^1 dx \\
&\quad \cdot \int d^d k \frac{1}{(k^2 + x(1-x)q^2 - (1-x)s^2 - xt^2 + i\epsilon)^2} \\
&\stackrel{d=6-2\epsilon}{=} M^{2\epsilon} z^2(M^2) \Gamma(-1+\epsilon) \int_0^1 dx \int ds^2 dt^2 \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) \\
&\quad \cdot (x(1-x)q^2 - (1-x)s^2 - xt^2)^{1-\epsilon} \tag{2.53}
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\Sigma'(M^2) &= -\frac{1}{\epsilon} z^2(M^2) \int ds^2 dt^2 \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) \int_0^1 dx x(1-x) + \text{endlich} \\
&= -\frac{1}{6\epsilon} z^2(\infty) + \text{endlich}. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, daß

$$z(\infty) = z(M^2) \left(1 + \int_{4M^2}^{\infty} \rho(\mu^2) d\mu^2 \right) = z(M^2) \int_0^{\infty} \hat{\rho}(\mu^2) d\mu^2. \tag{2.55}$$

Schließlich ergibt sich für die Renormierungskonstante:

$$Z = z(M^2) \left(1 + \delta^2 (1 - z(M^2)) - \frac{1}{6} \frac{\delta^2 g_0^2 z(M^2) z^2(\infty)}{128\pi^3 \epsilon} \right). \tag{2.56}$$

Für Z_g benötigt man noch den Ein-Loop-Beitrag zur Kopplungskonstanten-Renormierung (Abb. 2.6). Sein Beitrag zu $\Gamma^{(3)}$ ergibt sich zu

$$-\frac{i\delta^3 g_0^3}{(2\pi)^d} z^3(M^2) \int ds^2 dt^2 du^2 \int d^d q \frac{\hat{\rho}(s^2)}{(k-q)^2 - s^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\hat{\rho}(t^2)}{(k-q+p)^2 - t^2 + i\epsilon} \frac{\hat{\rho}(u^2)}{q^2 - u^2 + i\epsilon} \\
\stackrel{d=6-2\epsilon}{=} & -\frac{\delta^3 g_0^3 z^3(M^2)}{64\pi^3 \epsilon} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) \hat{\rho}(u^2) ds^2 dt^2 du^2 + \text{endlich} \\
= & -\frac{\delta^3 g_0^3 z^3(\infty)}{128\pi^3 \epsilon} + \text{endlich.} \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Also hat man

$$Z_g = 1 - \frac{\delta^2 g_0^2 z^3(\infty)}{128\pi^3 \epsilon}. \tag{2.58}$$

Damit ist dann der Zusammenhang zwischen der nackten und der renormierten Kopplungskonstante:

$$\begin{aligned}
g &= \delta g_0 \frac{Z^{3/2}}{Z_g} = \delta g_0 z^{3/2}(M^2) \left(1 + \frac{3}{2} \delta^2 (1 - z(M^2)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\delta^2 g_0^2 z(M^2) z^2(\infty)}{128\pi^3 \epsilon} + \frac{\delta^2 g_0^2 z^3(\infty)}{128\pi^3 \epsilon} \right), \tag{2.59}
\end{aligned}$$

also in niedrigster Ordnung:

$$g = \delta g_0 z^{3/2}(M^2). \tag{2.60}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$z = \frac{z(\infty)}{z(M^2)} = 1 + \int_{4M^2}^{\infty} \rho(\mu^2) d\mu^2, \tag{2.61}$$

so ist dann die Betafunktion:

$$\begin{aligned}
\beta(g) &= 2\epsilon^2 \frac{dg}{d\epsilon} = \frac{\delta^3 g_0^3 z^{9/2}(M^2)}{64\pi^3} \left(\frac{1}{4} \frac{z^2(\infty)}{z^2(M^2)} - \frac{z^3(\infty)}{z^3(M^2)} \right) \\
&= \frac{g^3}{64\pi^3} \left(\frac{1}{4} z^2 - z^3 \right) \tag{2.62}
\end{aligned}$$

und die anomale Dimension:

$$\gamma(g) = 2\epsilon^2 \frac{d \ln \sqrt{Z}}{d\epsilon} = \frac{1}{6} \frac{\delta^2 g_0^2}{128\pi^3} z(M^2) z^2(\infty) = \frac{g^2}{768\pi^3} z^2. \tag{2.63}$$

Für $\rho(q^2) \equiv 0$, also $z = 1$, stimmt dies mit den Ergebnissen der üblichen Störungstheorie überein (siehe [11]; beachte die leicht unterschiedliche Definition von γ).

FAC kann hier nicht angewendet werden, da dies die niedrigsten nichttrivialen Beiträge sind. PMS kann benutzt werden - man kann hier einfach nach z ableiten. Die Ergebnisse ($z_1 = 0, z_2 = 1/6$ bei β , $z = 0$ bei γ) sind allerdings unabhängig von g und stimmen daher auch für kleines g nicht mit denen aus der üblichen Störungstheorie überein.

Allerdings ist bekannt, daß im allgemeinen die niedrigste Ordnung der optimierten δ -Entwicklung sowieso kein vernünftiges Extremum liefert. Man sollte also die nächsthöhere Ordnung betrachten; dies sind Terme der Ordnung δ^4 in γ und δ^5 in β . Zwei-Loop-Graphen liefern Beiträge der Ordnung $\delta^5 g_0^5$; außerdem gibt es aber auch noch Beiträge $\sim \delta^5 g_0^3$. Diese stammen aus zwei Quellen; zunächst kann man den Zusammenhang zwischen g_0 und g schreiben als:

$$g = \delta g_0 z^{3/2}(M^2) \left(1 + \frac{3}{2} \delta^2 (1 - z(M^2)) \right) + O(\delta^3 g_0^3) \quad (2.64)$$

und hat damit

$$(\delta g_0 z^{3/2}(M^2))^n = \left(1 + \frac{3}{2} n \delta^2 (z(M^2) - 1) \right) g^n + \dots \quad (2.65)$$

Für $\delta = 1$ ist dann

$$\delta^2 g_0^2 z^3(M^2) = (3z(M^2) - 2) g^2; \quad \delta^3 g_0^3 z^{9/2}(M^2) = \left(\frac{9}{2} z(M^2) - \frac{7}{2} \right) g^3. \quad (2.66)$$

Außerdem treten auch noch Graphen mit Einfügungen in innere Linien auf. Solch eine Einfügung ersetzt den Propagator $D(k^2)$ der inneren Linie:

$$\begin{aligned} D(k^2) &\longrightarrow D(k^2) \left[-\frac{1}{2} \delta^2 \left(-k^2 + M^2 + \frac{1}{D(k^2)} \right) \right] D(k^2) \\ &= \frac{1}{2} \delta^2 (z(k^2) - 1) D(k^2) \\ &= \frac{1}{2} \delta^2 \left(z(\infty) - 1 + z(M^2) \int_{4M^2}^{\infty} \frac{(\mu^2 - M^2) \rho(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} d\mu^2 \right) D(k^2). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Der dritte Summand in der Klammer liefert bei der Berechnung von Graphen einen zusätzlichen Faktor k^2 in den Nenner, macht die Integrale also konvergenter. Da $\Sigma'(M^2)$ und $\Gamma^{(3)}(p, k)$ nur logarithmisch divergieren, liefert dieser Term also keinen Beitrag und nur die ersten beiden Summanden sind zu berücksichtigen. Man hat dann gerade den ursprünglichen Graphen ohne Einfügung, multipliziert mit einem Faktor $\frac{1}{2} \delta^2 (z(\infty) - 1)$.

Bis zur Ordnung δ^4 findet man die beiden in Abb. 2.7 dargestellten Graphen.

Abbildung 2.7: Divergente Beiträge durch Einfügung in innere Linien

Die konkrete Rechnung ergibt nun für Selbstenergie und Vertex:

$$\Sigma'(M^2) = -\frac{1}{6\epsilon} z^2(\infty) \left(1 - 2\delta^2(z(\infty) - 1)\right) \quad (2.68)$$

$$\Gamma^{(3)}(p, k) \Big|_{p^2=M^2, k^2=0} = -\delta g_0 - \frac{\delta^3 g_0^3 z^3(\infty)}{128\pi^3 \epsilon} \left(1 - \frac{3}{4}\delta^2(z(\infty) - 1)\right) \quad (2.69)$$

Unter Berücksichtigung der Beiträge der Ordnung $\delta^4 g^4$ bzw. $\delta^5 g^5$, aber ohne die Zwei-Loop-Beiträge hat man also ($\delta = 1$):

$$\beta(g) = \frac{g^3 z^2(\infty)}{64\pi^3 z^2(M^2)} \left(3z(M^2) - 2\right) \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}z(\infty) - \frac{z(\infty)}{z(M^2)} \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}z(\infty)\right)\right) \quad (2.70)$$

$$\gamma(g) = \frac{g^2}{768\pi^3} \left(\frac{9}{2}z(M^2) - \frac{7}{2}\right) \frac{z^2(\infty)}{z^2(M^2)} (3 - 2z(\infty)). \quad (2.71)$$

Nun kann man FAC anwenden; die Bedingung, daß diese Ergebnisse mit der vorherigen Ordnung übereinstimmen sollen, führt in beiden Fällen neben anderen Lösungen auf $z(M^2) = z(\infty) = 1$, also

$$\frac{z(\infty)}{z(M^2)} = 1 + \int \rho(\mu^2) d\mu^2 = 1, \quad (2.72)$$

und, da $\rho(\mu^2)$ positiv semidefinit ist, schließlich auf das gewünschte Ergebnis $\rho(\mu^2) \equiv 0$. Die Einbeziehung der Zwei-Loop-Graphen würde dann also auf ein nicht-störungstheoretisches Ergebnis für β und γ führen, das im Limes kleiner Kopplungskonstante in das Ergebnis der üblichen Störungstheorie übergeht.

Bei PMS sind nun jeweils zwei Gleichungen zu erfüllen:

$$\frac{\partial\beta}{\partial z(M^2)} = \frac{\partial\beta}{\partial z(\infty)} = 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z(M^2)} = \frac{\partial\gamma}{\partial z(\infty)} = 0 \quad (2.74)$$

Das erste dieser Gleichungssysteme liefert die Lösungen $z(\infty) = 2.715$, $z(M^2) = 3.056$; $z(\infty) = 0.679$, $z(M^2) = 4.534$; $z(\infty) = 2.022$, $z(M^2) = 1.076$; $z(\infty) = 3/2 \pm \sqrt{57}/6$, $z(M^2) = 2/3$ und schließlich $z(\infty) = 0$, $z(M^2)$ beliebig. Das zweite Gleichungssystem hat nur die Lösung $z(\infty) = 0$, $z(M^2)$ beliebig. Keine dieser Lösungen führt allerdings auf das Ergebnis der üblichen Störungstheorie $z(\infty)/z(M^2) = 1$!

Man sieht, daß die Beiträge der Graphen mit Einfügungen verschwinden, wenn man als Normierung $z(\infty) = 1$ wählt, d.h., der Propagator verhält sich im Unendlichen wie in der üblichen Störungstheorie. Dies gilt nicht nur in dieser Ordnung, sondern allgemein für Graphen mit beliebig vielen Einfügungen, da, wie gesagt, jede Einfügung einen Faktor $z(\infty) - 1$ liefert.

Kapitel 3

Quantenelektrodynamik

3.1 Die Wirkung

Die bekannte QED-Wirkung ist

$$S = \int \left(\bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m_0)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - e_0\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x) \right) dx. \quad (3.1)$$

Nun werden zwei Formfaktoren eingeführt: $K_2(x-y)$ für den Elektron- und $K_3(x-y)$ für den Photonpropagator. Die Kopplungskonstante e_0 wird analog zum skalaren Feld durch $\delta e_0(\sqrt{\kappa(q^2)} + \delta^2(1 - (\sqrt{\kappa(q^2)})))$ ersetzt, auch in den Eichtransformationen; als Abkürzung schreibe dafür $\delta e_{0\kappa}$.

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x); \quad \psi(x) \rightarrow \psi(x) \exp(-i\delta e_{0\kappa}\Lambda(x)).$$

Um Eichinvarianz zu gewährleisten, muß nun ein Exponentialfaktor

$$U(x, y) = \exp \left(i\delta e_{0\kappa} \int_x^y A^\mu(z) dz_\mu \right) \quad (3.2)$$

eingefügt und der Kopplungsterm modifiziert werden. Schließlich wird noch ein Massen-Counterterm abgespalten, wiederum unter Berücksichtigung einer Abhängigkeit von q^2 . Die Wirkung kann dann geschrieben werden als:

$$S = S_0 + \delta S_I \quad (3.3)$$

mit

$$\begin{aligned} S_0 &= \int \bar{\psi}(x)U(x, y)K_2(x-y)(i\cancel{\partial} - m)\psi(y)dx dy \\ &\quad - \int \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)K_3(x-y)F^{\mu\nu}(y)dx dy \\ S_I &= \int e_{0\kappa}\bar{\psi}(x)U(x, y) \left[K_2(x-y) + \delta^2\delta(x-y) - \delta^2K_2(x-y) \right] \not{A}(y)\psi(y)dx dy \\ &\quad + \delta \int \bar{\psi}(x)U(x, y) [\delta(x-y) - K_2(x-y)] (i\cancel{\partial} - m)\psi(y)dx dy \\ &\quad - \delta \int \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x) [\delta(x-y) - K_3(x-y)] F^{\mu\nu}(y)dx dy \\ &\quad + \delta \int \bar{\psi}(x) \left[m - m_1(q^2) + \delta(m_1(q^2) - m_0) \right] \psi(x)dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Potenzen von δ sind wiederum so gewählt, daß in Analogie zur üblichen Störungstheorie die ersten Korrekturen zu den nackten Propagatoren in der Ordnung δ^2 auftreten.

Die obige Wirkung ist invariant unter der üblichen Ladungskonjugation

$$e_0 \rightarrow -e_0; \quad A^\mu \rightarrow -A^\mu$$

und unter

$$\delta \rightarrow -\delta; \quad A^\mu \rightarrow -A^\mu.$$

Für beliebiges δ ist sie außerdem eichinvariant. Addiere daher den Eichfixierungsterm

$$-\frac{1}{2\alpha} \int \partial_\mu A^\mu(x) K_3(x-y) \partial_\nu A^\nu(y).$$

Nach einer partiellen Integration hat man dann für den quadratischen Term der Ordnung δ^0 in A^μ :

$$\frac{1}{2} \int A_\mu(x) K_3(x-y) \left(g^{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu(y). \quad (3.5)$$

Im folgenden wähle die Feynman-Eichung $\alpha = 1$.

Der Exponentialfaktor (3.2) wird nun noch bis zur Ordnung δ^2 entwickelt; ebenso werden in der Wirkung nur die Terme bis zur Ordnung δ^2 mitgenommen. Man erhält dann:

$$S = S^{(0)} + \delta S^{(1)} + \delta^2 S^{(2)} \quad (3.6)$$

mit

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \int \bar{\psi}(x) K_2(x-y) (i \not{\partial} - m) \psi(y) dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int A_\mu(x) K_3(x-y) \square A^\mu(y) dx dy \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} S_S^{(1)} &= i e_0 \sqrt{\kappa(q^2)} \int \bar{\psi}(x) \int_x^y A^\mu(z) dz_\mu K_2(x-y) (i \not{\partial} - m) \psi(y) dx dy \\ S_K^{(1)} &= -e_0 \sqrt{\kappa(q^2)} \int \bar{\psi}(x) K_2(x-y) \not{A}(y) \psi(y) dx dy \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} S_{SS}^{(2)} &= -\frac{1}{2} e_0^2 \kappa(q^2) \int \bar{\psi}(x) \left(\int_x^y A^\mu(z) dz_\mu \right)^2 K_2(x-y) (i \not{\partial} - m) \psi(y) dx dy \\ S_{SK}^{(2)} &= -i e_0^2 \kappa(q^2) \int \bar{\psi}(x) \int_x^y A^\mu(z) dz_\mu K_2(x-y) \not{A}(y) \psi(y) dx dy \\ S_{Ie}^{(2)} &= \int \bar{\psi}(x) (\delta(x-y) - K_2(x-y)) (i \not{\partial} - m) \psi(y) dx dy \\ S_M^{(2)} &= \int \bar{\psi}(x) [m - m_1(q^2) + \delta(m_1(q^2) - m_0)] \psi(x) dx \\ S_{I\gamma}^{(2)} &= \frac{1}{2} \int A_\mu(x) (\delta(x-y) - K_3(x-y)) (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(y) dx dy. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Im letzten Term wurde hierbei wiederum eine partielle Integration durchgeführt.

Bezeichnet man mit $\tilde{K}_2(p^2)$ bzw. $\tilde{K}_3(k^2)$ die Fouriertransformierten der Formfaktoren $K_2(x - y)$ bzw. $K_3(x - y)$, so erhält man aus S_0 die nackten Propagatoren:

$$S(p) = \frac{1}{(\not{p} - m + i\epsilon)\tilde{K}_2(p^2)}$$

$$D^{\mu\nu}(k^2) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(k^2 + i\epsilon)\tilde{K}_3(k^2)}. \quad (3.10)$$

Die anderen Terme in S sind in Abb. 3.1 diagrammatisch dargestellt. Aus der Entwicklung des Exponentialfaktors (3.2) im Elektronpropagator erhält man Stringterme (S) und (SS), der übliche Kopplungsterm wird durch den Elektron-Formfaktor modifiziert (K), und die Entwicklung des Exponentialfaktors im Kopplungsterm liefert den Term (SK). Die Masseneinfügung im Elektronpropagator (M) wird wiederum durch ein Kreuz \times symbolisiert, und man hat zwei zusätzliche Zweiertizes \bullet aus den Einfügungen der normalen freien Propagatoren (Ie), (I γ).

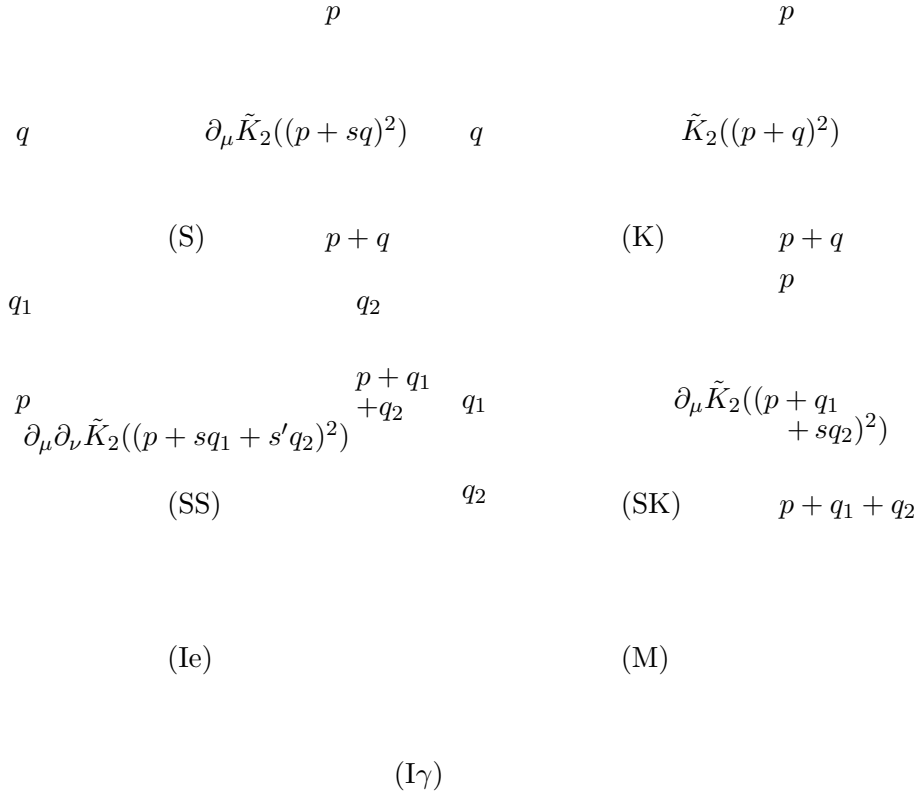


Abbildung 3.1: Feynman-Diagramme für die Terme in S_{QED} bis zur Ordnung δ^2

Ein Quadrat \blacksquare steht für einen Faktor $\not{p} - m$, eine dicke Linie --- bedeutet jeweils einen Faktor $\tilde{K}_2(p^2)$. Für jedes Photon mit einlaufendem Impuls q , das ins Innere einer solchen Linie einmündet, ist der Gradient dieses Faktors bezüglich des Impulses zu bilden, im Argument q durch sq zu ersetzen und über s von 0 bis 1 zu integrieren.

Es kann nun vorkommen, daß in Feynman-Diagrammen innere Linien weggekürzt werden: $\text{---} = 1$.

Für konkrete Berechnungen führe nun noch die einfach subtrahierten Dispersionsrelationen

$$\tilde{K}_2(p^2) = \tilde{K}_2(m^2) \left(1 + (p^2 - m^2) \int_{m^2}^{\infty} \frac{\rho_2(\mu^2) d\mu^2}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right) \quad (3.11)$$

$$\tilde{K}_3(k^2) = \tilde{K}_3(0) \left(1 + k^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\rho_3(\mu^2) d\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right) \quad (3.12)$$

ein. Für die Inversen schreibe

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{K}_2(p^2)} &= \frac{1}{\tilde{K}_2(m^2)} \left(1 + (p^2 - m^2) \int_{m^2}^{\infty} \frac{\sigma_2(\mu^2) d\mu^2}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right) \\ \frac{1}{\tilde{K}_3(k^2)} &= \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \left(1 + k^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sigma_3(\mu^2) d\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Um später die Renormierung durchführen zu können, werden im folgenden nun zunächst die Einteilchen-irreduziblen Anteile zu den Propagatoren und zum Vertex ermittelt. Die Rechnungen werden wiederum mittels der Standardmethoden des Pfadintegral-Formalismus durchgeführt, wobei in allen Schritten jeweils bis zur Ordnung δ^2 entwickelt wird.

3.2 Vakuumpolarisation

Die Einteilchen-irreduziblen Beiträge zum Photonpropagator sind in Abb. 3.2 dargestellt. Man erhält daraus für die Vakuumpolarisation in d Dimensionen

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \delta^2[\tilde{K}_3(q^2) - 1](q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) + \frac{i\delta^2 e_0^2 \kappa(q^2)}{(2\pi)^d} \int d^d p \sum_{i=2}^6 \pi_{(i)}^{\mu\nu}(q, p). \quad (3.14)$$

Der erste Term (Diagramm (1)) stammt von der Einfügung des normalen freien Propagators, die Terme (2)-(4) sind Loopdiagramme, die aus den beiden verschiedenen Kopplungen (S), (K) entstehen, und die Terme (5) und (6) schließlich kommen aus $S^{(2)}$, also letztlich aus der Entwicklung des Exponentialfaktors.

Die einzelnen Terme sehen nun wie folgt aus (es wird $\text{Tr}[1_d] = d$ gesetzt):

$$(1) \qquad (2)$$

$$(3) \qquad (4)$$

$$(5) \qquad (6)$$

Abbildung 3.2: Beiträge zur Vakuumpolarisation bis zur Ordnung δ^2

$$\begin{aligned}
\pi_{(2)}^{\mu\nu}(q, p) &= \int_0^1 ds ds' \text{Tr} \left[\frac{\partial^\mu \tilde{K}_2((p+sq)^2) \partial^\nu \tilde{K}_2((p+s'q)^2)}{\tilde{K}_2(p^2) \tilde{K}_2((p+q)^2)} \right] \\
&= d \int_0^1 ds ds' \frac{\partial^\mu \tilde{K}_2((p+sq)^2) \partial^\nu \tilde{K}_2((p+s'q)^2)}{\tilde{K}_2(p^2) \tilde{K}_2((p+q)^2)} \\
\pi_{(3)}^{\mu\nu}(q, p) &= \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{(\not{p} + \not{q} - m + i\epsilon)} \gamma^\nu \frac{1}{(\not{p} - m + i\epsilon)} \right] \\
&= d \frac{(p+q)^\mu p^\nu + p^\mu (p+q)^\nu - g^{\mu\nu} p_\rho (p+q)^\rho + g^{\mu\nu} m^2}{[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon][p^2 - m^2 + i\epsilon]} \\
\pi_{(4)}^{\mu\nu}(q, p) &= 2 \int_0^1 ds \partial^\mu \tilde{K}_2((p+sq)^2) \text{Tr} \left[\frac{\gamma^\nu}{(\not{p} - m + i\epsilon) \tilde{K}_2(p^2)} \right] = -\pi_{(6)}^{\mu\nu} \\
\pi_{(5)}^{\mu\nu}(q, p) &= - \int_0^1 ds ds' \partial^\mu \partial^\nu \tilde{K}_2((p+(s'-s)q)^2) \text{Tr} \left[\frac{1}{\tilde{K}_2(p^2)} \right] \\
&= -2d \int_0^1 ds ds' \theta(s'-s) \partial^\mu \partial^\nu \tilde{K}_2((p+(s'-s)q)^2) \frac{1}{\tilde{K}_2(p^2)} \\
\pi_{(6)}^{\mu\nu}(q, p) &= -2 \int_0^1 ds \partial^\mu \tilde{K}_2((p+sq)^2) \text{Tr} \left[\frac{\gamma^\nu}{(\not{p} - m + i\epsilon) \tilde{K}_2(p^2)} \right]. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Hierbei wurden bereits die nackten Propagatoren (3.10) eingesetzt, und es wurde benutzt, daß sich String-Faktoren in inneren Linien teilweise mit den Formfaktoren in den Propagatoren herauskürzen. Auf diese Weise kürzt sich $\pi_{(4)}^{\mu\nu}$, aus (S) und (K) stammend, mit $\pi_{(6)}^{\mu\nu}$, aus (SK) stammend; $\pi_{(3)}^{\mu\nu}$ wird identisch mit der üblichen Vakuumpolarisation.

Im folgenden wird durch Kontraktion mit q_μ geprüft, ob $\Pi^{\mu\nu}$ transversal ist. Der erste Term in $\Pi^{\mu\nu}$ ergibt dabei Null; außerdem erhält man durch die übliche Integration aus dem dritten Term ein Ergebnis, das ebenfalls einen Faktor $q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu$ enthält. In den Termen mit Ableitungen von $\tilde{K}_2(p^2)$ benutze $q_\mu \partial^\mu \tilde{K}_2((p+sq)^2) = \frac{d}{ds} \tilde{K}_2((p+sq)^2)$ und äquivalent für $\partial^\mu \partial^\nu \tilde{K}_2((p+(s'-s)q)^2)$. Man hat also:

$$\begin{aligned} q_\mu \Pi^{\mu\nu} &= \frac{i\delta^2 e_0^2 \kappa(q^2) d}{(2\pi)^d} \int d^d p \int_0^1 ds \left[\frac{\partial^\nu \tilde{K}_2((p+sq)^2)}{\tilde{K}_2(p^2)} - \frac{\partial^\nu \tilde{K}_2((p+sq)^2)}{\tilde{K}_2((p+q)^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^\nu \tilde{K}_2((p+(1-s)q)^2)}{\tilde{K}_2(p^2)} + \frac{\partial^\nu \tilde{K}_2((p-sq)^2)}{\tilde{K}_2(p^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Substituiere nun im zweiten Term p durch $-p-q$ und anschließend s durch $1-s$, im dritten $1-s$ durch s und im vierten p durch $-p$, so kürzen sich die Terme heraus. Allerdings ist nur die Summe transversal, nicht jeweils die beiden Graphen separat.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(0) &= 0 + \frac{ie_0^2 \kappa(0) d}{(2\pi)^d} \int d^d p \left(\int ds ds' \frac{\partial^\mu \tilde{K}_2(p^2) \partial^\nu \tilde{K}_2(p^2)}{\tilde{K}_2(p^2) \tilde{K}_2(p^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p^2 + g^{\mu\nu} m^2}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} - \int ds ds' \frac{\partial^\mu \partial^\nu \tilde{K}_2(p^2)}{\tilde{K}_2(p^2)} \right) \\ &= 0 + \frac{ie_0^2 \kappa(0) d}{(2\pi)^d} \int d^d p \partial^\mu \frac{-\partial^\nu \tilde{K}_2(p^2)}{\tilde{K}_2(p^2)} = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

falls der Integrand im Unendlichen genügend stark abfällt.

Die Vakuumpolarisation kann also geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= \delta^2(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \left[[\tilde{K}_3(q^2) - 1] + e_0^2 \kappa(q^2) \Pi(q^2) \right] \\ &= \delta^2(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \left[[K_3(q^2) - 1] + \frac{ie_0^2 \kappa(q^2)}{(2\pi)^d} \right. \\ &\quad \left. \cdot \int d^d p [\pi_{(2)}(q, p) + \pi_{(3)}(q, p) + \pi_{(5)}(q, p)] \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei $\pi_{(i)} = \pi_{(i)\mu}^\mu / (q^2(d-1))$ gesetzt wurde. Wegen (3.17) ist $\Pi(q^2)$ bei $q^2 = 0$ regulär, und die Photonmasse ist 0; dies gilt aber wiederum nicht für die einzelnen Summanden.

Für den vollen Propagator hat man dann:

$$\Delta^{\mu\nu} = D^{\mu\nu} - D^{\mu\rho} \delta^2(q^2 g^{\rho\lambda} - q^\rho q^\lambda) \left[[\tilde{K}_3(q^2) - 1] + e_0^2 \kappa(q^2) \Pi(q^2) \right] \Delta^{\lambda\nu}, \quad (3.19)$$

$$(1) \qquad (2)$$

$$(3) \qquad (4)$$

$$(5) \qquad (6)$$

$$(7) \qquad (8)$$

Abbildung 3.3: Beiträge zur Selbstenergie des Elektrons bis zur Ordnung δ^2

und, wenn man den nackten Propagator (3.10) einsetzt und die eichabhängigen Terme weglässt, schließlich:

$$\Delta^{\mu\nu}(q^2) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(q^2 + i\epsilon)[\tilde{K}_3(q^2) - \delta^2(\tilde{K}_3(q^2) - 1) - \delta^2 e_0^2 \kappa(q^2) \Pi(q^2)]}. \quad (3.20)$$

3.3 Selbstenergie des Elektrons

Es gibt insgesamt zwölf Einteilchen-irreduzible Anteile zum Elektronpropagator; vier davon sind Tadpoles, deren Beitrag sich zu Null ergibt. Die restlichen acht sind in Abb. 3.3 diagrammatisch dargestellt. Man kann für die Selbstenergie des Elektrons also schreiben:

$$\begin{aligned} \Sigma(q) &= \delta^2[\tilde{K}_2(q^2) - 1](\not{q} - m) - \delta^2(m - m_1(q^2)) \\ &\quad + \frac{i\delta^2 e_0^2 \kappa(q^2)}{(2\pi)^d} \int d^d k \sum_{i=3}^8 \sigma_{(i)}(q, k). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Der erste Term stammt wiederum aus der Einfügung des üblichen freien Propagators, der zweite ist der Massen-Counterterm, dann folgen vier Loopgraphen, die aus den beiden Kopplungen entstehen, und schließlich die beiden Graphen aus der Entwicklung von $U(x, y)$ bis zur Ordnung δ^2 . Im einzelnen hat man:

$$\begin{aligned}
\sigma_{(3)}(q, k) &= - \int_0^1 ds ds' \frac{(\not{q} - m) \partial_\mu \tilde{K}_2((q - sk)^2) \partial^\mu \tilde{K}_2((q - s'k)^2)}{(k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2) \tilde{K}_2((q - k)^2)} \\
\sigma_{(4)}(q, k) &= -\gamma^\mu \frac{\tilde{K}_2(q^2)}{(\not{q} - \not{k} - m + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} \gamma^\mu \\
&= - \frac{\tilde{K}_2(q^2) ((2-d)(\not{q} - \not{k}) + dm)}{((q - k)^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} \\
\sigma_{(5)}(q, k) &= - \int_0^1 ds (\not{q} - m) \frac{\partial^\mu \tilde{K}_2((q - sk)^2) \tilde{K}_2(q^2)}{(\not{q} - \not{k} - m + i\epsilon) \tilde{K}_2((q - k)^2) (k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} \gamma^\mu \\
&= - \int_0^1 ds \frac{(\not{q} - m)(\not{q} - \not{k} + m + i\epsilon) \not{\partial} \tilde{K}_2((q - sk)^2) \tilde{K}_2(q^2)}{((q - k)^2 - m^2 + i\epsilon) \tilde{K}_2((q - k)^2) (k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} \\
\sigma_{(6)}(q, k) &= - \int_0^1 ds \frac{\not{\partial} \tilde{K}_2((q - sk)^2)}{(k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} \\
\sigma_{(7)}(q, k) &= + \frac{1}{2} \int_0^1 ds ds' \square \tilde{K}_2((q - (s' - s)k)^2) \frac{\not{q} - m}{(k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} \\
&= \int_0^1 ds ds' \theta(s' - s) \square \tilde{K}_2((q - (s' - s)k)^2) \frac{\not{q} - m}{(k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} \\
\sigma_{(8)}(q, k) &= + \int_0^1 ds \frac{\not{\partial} \tilde{K}_2((q - sk)^2)}{(k^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(k^2)} = -\sigma_{(6)}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Hierbei wurden wiederum, wo es möglich war, die Formfaktoren gekürzt; dadurch kürzt sich hier $\sigma_{(6)}$ mit $\sigma_{(8)}$.

Für den vollen Propagator gilt dann:

$$S_e(q) = S(q) + S(q) \Sigma(q) S_e(q) \tag{3.23}$$

also

$$\begin{aligned}
S_e(q) &= \frac{1}{(\not{q} - m + i\epsilon) \tilde{K}_2(q^2) - \Sigma(q)} \\
&= \frac{1}{(\not{q} - m + i\epsilon) [\tilde{K}_2 - \delta^2 (\tilde{K}_2 - 1)] - \delta^2 e_0^2 \kappa(q^2) (\hat{\Sigma}(q) - \hat{\Sigma}(m))}, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

wobei gesetzt wurde:

$$\hat{\Sigma}(q) = \frac{i}{(2\pi)^d} \int d^d k (\sigma_{(3)}(q, k) + \sigma_{(4)}(q, k) + \sigma_{(5)}(q, k) + \sigma_{(7)}(q, k))$$

(3.25)

$$\hat{\Sigma}(m) = \frac{m - m_1(q^2)}{e_0^2 \kappa(q^2)}, \quad (3.26)$$

d.h., die Massenrenormierung wird wiederum gleich durchgeführt.

3.4 Kopplungskonstanten-Renormierung

Wie aus der φ^3 -Theorie bekannt, ist es praktisch, die Formfaktoren am Renormierungspunkt auf 1 zu normieren; wie dort kürzt sich auch hier die Normierung der Formfaktoren durch die Renormierung heraus. Rechne also im folgenden mit $\tilde{K}_2(m^2) = \tilde{K}_3(0) = 1$.

Die Einteilchen-irreduziblen Anteile zum Vertex bis zur Ordnung δ sind bereits in Abb. 3.1 dargestellt: es handelt sich gerade um die Graphen (S) und (K). Die Rechnung ergibt für einlaufenden Elektronimpuls p und Photonimpuls k :

$$\Gamma^\mu(p, k) = \sqrt{\kappa(q^2)} \left[\tilde{K}_2(p^2) \gamma^\mu + (\not{p} + \not{k} - m) \int_0^1 \partial^\mu \tilde{K}_2((p + sk)^2) ds \right] \quad (3.27)$$

also

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p, 0) &= \sqrt{\kappa(q^2)} \left[\tilde{K}_2(p^2) \gamma^\mu + (\not{p} - m) \partial^\mu \tilde{K}_2(p^2) \right] \\ &= \sqrt{\kappa(q^2)} \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_e^{-1}(p) + O(\delta^2); \end{aligned} \quad (3.28)$$

die Ward-Identität wird also in dieser Ordnung nur leicht modifiziert.

Betrachtet man das Matrixelement mit äußeren Elektronspinoren u , so erhält man auf der Massenschale ($\not{p}u = mu$ und damit auch $p^2 = m^2$):

$$\bar{u} \Gamma^\mu(p, 0) u = \sqrt{\kappa(q^2)} \bar{u} \gamma^\mu u. \quad (3.29)$$

Zu physikalisch beobachtbaren Effekten (on-shell) führt also nur der erste Term in Γ^μ , und man kann wie üblich setzen:

$$\Gamma^\mu = \frac{\gamma^\mu}{Z_1} \quad \text{mit: } Z_1^{-1} = \sqrt{\kappa(q^2)} + O(\delta^2). \quad (3.30)$$

Auch die Wellenfunktions-Renormierungskonstanten können wie üblich definiert werden:

$$\begin{aligned} Z_2^{-1} &= \left. \frac{\partial S_e^{-1}(q)}{\partial \not{q}} \right|_{q=m} \\ Z_3^{-1} &= \left. \frac{\partial \Delta^{-1}(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2=0}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Das Matrixelement der obigen Ward-Identität führt dann auf

$$Z_1^{-1} = \sqrt{\kappa(q^2)} Z_2^{-1} + O(\delta^2), \quad (3.32)$$

und damit erhält man schließlich für die renormierte Ladung:

$$e = \delta \frac{Z_2 \sqrt{Z_3}}{Z_1} e_0 = \delta \sqrt{\kappa(q^2)} e_0 + O(\delta^3). \quad (3.33)$$

3.5 Renormierung der Propagatoren

Ziel wird es nun wiederum sein, die renormierte Vakuumpolarisation und Selbstenergie auf die aus der üblichen Störungstheorie bekannte Gestalt zu bringen:

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(q^2) &= \Pi(q^2) - \Pi(0) \\ \bar{\Sigma}(q) &= \hat{\Sigma}(q) - \hat{\Sigma}(m) - (\not{q} - m)\hat{\Sigma}'(m),\end{aligned}\quad (3.34)$$

da dann nach den Erfahrungen in der skalaren Feldtheorie die renormierten Größen endlich sein sollten.

Aus den obigen Definitionen (3.31) erhält man zunächst die Renormierungskonstanten

$$Z_2^{-1} = 1 - \delta^2 e_0^2 \kappa(m^2) \hat{\Sigma}'(m) \quad (3.35)$$

$$Z_3^{-1} = 1 - \delta^2 e_0^2 \kappa(0) \Pi(0). \quad (3.36)$$

Für die Vakuumpolarisation kann man nun ansetzen:

$$\Pi(q^2) = \Pi(0) \tilde{K}_3(q^2) \frac{\kappa(0)}{\kappa(q^2)} + \bar{\Pi}(q^2), \quad (3.37)$$

Die Normierung von κ kürzt sich heraus; wenn man $\kappa(0) = 1$ wählt, so erhält man den renormierten Photonpropagator

$$\Delta_{ren}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(q^2 + i\epsilon)[\tilde{K}_3(q^2) - \delta^2(\tilde{K}_3(q^2) - 1) - \delta^2 e_0^2 \kappa(q^2) \bar{\Pi}(q^2)]}. \quad (3.38)$$

Für die Selbstenergie dagegen schreibe

$$\hat{\Sigma}(q) - \hat{\Sigma}(m) = (\not{q} - m) \tilde{K}_2(q^2) \frac{\kappa(m^2)}{\kappa(q^2)} \hat{\Sigma}'(m) + \bar{\Sigma}(q) \quad (3.39)$$

und benutze als Normierung $\kappa(m^2) = 1$; dann hat man

$$S_{e,ren}(q) = \frac{1}{(\not{q} - m + i\epsilon)[\tilde{K}_2(q^2) - \delta^2(\tilde{K}_2(q^2) - 1)] - \delta^2 e_0^2 \kappa(q^2) \bar{\Sigma}(q)}. \quad (3.40)$$

Bei den beiden Propagatoren sind also unterschiedliche Normierungen für κ jeweils praktischer; würde man beides auf einmal verlangen, $\kappa(0) = \kappa(m^2) = 1$, so wäre dies eine starke Einschränkung an die bisher beliebige Funktion $\kappa(q^2)$.

Außerdem hat man noch als Bedingung, daß die renormierten Größen endlich sein müssen; man sollte also die Ausdrücke (3.37) und (3.39) in die übliche Form (3.34) überführen. Es muß also gelten: $\tilde{K}_2(q^2) = \kappa(q^2)$ bzw. $\tilde{K}_3(q^2) = \kappa(q^2)$.

Wenn man beide Propagatoren gleichzeitig optimieren wollte, so hätte man also $\tilde{K}_2 = \tilde{K}_3$ — was Probleme bei der Normierung und bei der Darstellung durch Spektralfunktionen nach sich ziehen würde. Im allgemeinen wird bei der optimierten δ -Entwicklung aber immer die Optimierung für jede interessierende Größe getrennt durchgeführt, wodurch sich dann auch, abhängig von der gewählten Größe, verschiedene Werte für die eingeführten Parameter bzw. hier für die Formfaktoren ergeben. Im folgenden betrachte also die beiden Propagatoren getrennt.

3.5.1 Photonpropagator

Setze nun also $\tilde{K}_3(q^2) = \kappa(q^2)$; dann hat man

$$\bar{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0). \quad (3.41)$$

Mit der Normierung $\tilde{K}_3(0) = 1$ und der Renormierungskonstanten (3.36) bekommt man dann den renormierten Propagator, der hier gleich mit der renormierten Ladung geschrieben ist:

$$\begin{aligned} \Delta_{ren}^{\mu\nu}(q) &= \frac{-g^{\mu\nu}}{(q^2 + i\epsilon)[\tilde{K}_3(q^2) - \delta^2(\tilde{K}_3(q^2) - 1) - e^2\bar{\Pi}(q^2)]} \\ &\stackrel{\delta=1}{=} \frac{-g^{\mu\nu}}{(q^2 + i\epsilon)[1 - e^2\bar{\Pi}(q^2)]}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.5.2 Elektronpropagator

Hier ist $\tilde{K}_2(q^2) = \kappa(q^2)$, die renormierte Selbstenergie wird

$$\bar{\Sigma}(q) = \hat{\Sigma}(q) - \hat{\Sigma}(m) - (\not{q} - m)\hat{\Sigma}'(m). \quad (3.43)$$

Die Normierung ist hier $\tilde{K}_2(m^2) = 1$, für die Renormierungskonstante benutze (3.35), und der renormierte Propagator, mit der renormierten Ladung geschrieben, ist

$$\begin{aligned} S_{e,ren}(q) &= \frac{1}{(\not{q} - m + i\epsilon)[\tilde{K}_2(q^2) - \delta^2(\tilde{K}_2(q^2) - 1)] - e^2\bar{\Sigma}(q)} \\ &\stackrel{\delta=1}{=} \frac{1}{\not{q} - m + i\epsilon - e^2\bar{\Sigma}(q)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.6 Allgemeines zur Optimierung der Propagatoren

Es stehen wieder die beiden schon beim skalaren Feld benutzten Optimierungsmethoden zur Verfügung: PMS und FAC. Bei der ersteren fordere nun, daß die Variationsableitung des renormierten Propagators nach beiden Spektralfunktionen $\rho_i(\mu^2)$ verschwindet, bei FAC fordere dagegen wieder die Gleichheit von nacktem renormiertem und vollem renormiertem Propagator.

3.6.1 Photonpropagator

PMS führt auf die beiden Gleichungen

$$\frac{\delta\bar{\Pi}(q^2)}{\delta\rho_2(p^2)} = \frac{\delta\bar{\Pi}(q^2)}{\delta\rho_3(p^2)} = 0. \quad (3.45)$$

Da die Vakuumpolarisation aber gar nicht von ρ_3 abhängt, ist die zweite Gleichung identisch erfüllt, und nur die erste Gleichung kann benutzt werden.

Die Anwendung von FAC ergibt:

$$\tilde{K}_3(q^2) = 1 - e^2\bar{\Pi}(q^2). \quad (3.46)$$

Wiederum erhält man daraus keine sinnvolle Integralgleichung für $\tilde{K}_3(k^2)$, da es nur auf der linken Seite überhaupt auftritt, aber auch keine Gleichung für $\tilde{K}_2(p^2)$, da ρ_2 nur auf der rechten Seite in $\bar{\Pi}$ auftritt. Die Gleichung liefert also nur einen Zusammenhang zwischen den beiden Formfaktoren, so daß man keine iterative Lösung finden kann.

3.6.2 Elektronpropagator

PMS gibt hier

$$\frac{\delta\bar{\Sigma}(q)}{\delta\rho_2(p^2)} = \frac{\delta\bar{\Sigma}(q)}{\delta\rho_3(p^2)} = 0. \quad (3.47)$$

Aus der ersten Gleichung könnte man ρ_2 und ρ_3 bestimmen, aber die zweite hat keine Lösung, da $1/\tilde{K}_3(k^2)$ nur linear in der Selbstenergie auftritt - dieses Gleichungssystem ist also nicht lösbar.

FAC dagegen liefert:

$$\tilde{K}_2(q^2) = 1 - e^2 \frac{\bar{\Sigma}(q)}{\not{q} - m}, \quad (3.48)$$

also eine sinnvolle Integralgleichung für $\rho_2(p^2)$.

Zusammenfassend: $\tilde{K}_2(p^2)$ ist bestimmbar, wenn man FAC auf den Elektronpropagator oder PMS auf den Photonpropagator anwendet; $\tilde{K}_3(k^2)$ dagegen kann (in dieser Ordnung) nicht bestimmt werden, man kann höchstens einen Zusammenhang zwischen den beiden Formfaktoren herleiten.

Betrachtet man die n -te Potenz der Propagatoren, so ändern sich die Ergebnisse fast nicht: FAC angewendet ergibt jeweils wieder dieselben Gleichungen, PMS angewendet auf den Elektronpropagator führt wieder auf zwei Gleichungen, von denen die eine aus den obigen Gründen keine Lösung hat. Wendet man allerdings PMS auf den Photonpropagator an, so erhält man zwar für $\rho_2(p^2)$ wiederum dieselbe Gleichung, zusätzlich aber nun

$$n\tilde{K}_3(q^2)^{n-1} \frac{\delta\tilde{K}_3(q^2)}{\delta\rho_3(p^2)} - n \frac{\delta\tilde{K}_3(q^2)}{\delta\rho_3(p^2)} = 0, \quad (3.49)$$

was nur durch $\tilde{K}_3(q^2) \equiv 1$ gelöst werden kann.

Will man nun einen der Propagatoren optimieren, so muß zunächst die renormierte Vakuumpolarisation $\bar{\Pi}(q^2)$ bzw. die renormierte Selbstenergie $\bar{\Sigma}(q)$ berechnet werden. Die Rechnung ergibt, daß bei der Vakuumpolarisation nur der Graph (3) divergent ist; da er mit dem Graphen aus der üblichen Störungstheorie übereinstimmt, treten dort also keine Probleme mit der Renormierung auf.

Rechnet man jedoch die Selbstenergie aus, so ergibt sich, daß selbst bei der obigen Wahl $\kappa(q^2) = \tilde{K}_2(q^2)$, wodurch die renormierte Selbstenergie in die übliche Form (3.34) gebracht wird, immer noch Divergenzen auftreten! Dies gilt sowohl für einzelne Graphen (einfach nachrechenbar z. B. für Graph (4)) als auch für die Summe aller Graphen.

Es existieren zwar sicher Funktionen $\kappa(q^2)$, die die Selbstenergie endlich machen würden; ein Beispiel ist:

$$\kappa(q^2) = \frac{(\not{q} - m)\hat{\Sigma}'(m)}{\hat{\Sigma}(q) - \hat{\Sigma}(m) - f(q)} \tilde{K}_2(q^2) \quad (3.50)$$

mit einer beliebigen, endlichen Funktion $f(q)$; dann hätte man nämlich $\bar{\Sigma}(q) = f(q)$, also eine endliche Selbstenergie. Es existiert jedoch kein Kriterium, um diese völlig willkürliche Wahl zu motivieren; auch PMS oder FAC würden kein eindeutiges Ergebnis für die frei wählbare Funktion $f(q)$ liefern. Die in der skalaren Theorie erfolgreichen Methoden zur Renormierung der Propagatoren versagen hier also.

Selbst wenn eine eindeutige Vorschrift vorhanden wäre, um Vakuumpolarisation und Selbstenergie endlich zu bekommen, hätten die Ergebnisse dennoch eine recht komplizierte Struktur, da man die endlichen Anteile von relativ vielen Graphen berücksichtigen muß. Dies würde dann schlußendlich in einer relativ komplizierten Integralgleichung resultieren. Einfacher ist es natürlich, Größen zu betrachten, zu denen nur die unendlichen Anteile der jeweiligen Graphen beitragen, und dann nur diese zu berechnen; gehe also genauso vor wie in [10] und in der skalaren Theorie: Die interessierenden Größen sind nun die anomalen Dimensionen und die Betafunktion. Hierfür kann man die Funktion $\kappa(q^2)$, die ja ursprünglich wiederum nur eingeführt wurde, um die renormierten Größen endlich zu machen, $\equiv 1$ setzen, ebenso wie schon in der skalaren Theorie; außerdem kann man mit $m_1(q^2) = m_0$ rechnen.

Für die Betafunktion benötigt man zunächst noch eine höhere Ordnung des Elektron-Photon-Vertex:

3.7 Elektron-Photon-Vertex bis zur Ordnung δ^3

Außer den beiden Graphen (S) und (K) (Ordnung δ) hat man nun 25 zusätzliche Beiträge (Abb. 3.4, 3.5). Die ersten acht haben drei Vertizes, die jeweils (S) oder (K) sein können; (9)-(16) entstehen durch Kombination von (SS) und (SK) mit (S) und (K); (17) stammt aus der Entwicklung von $U(x, y)$ im Elektronpropagator bis zur dritten Ordnung, (18) aus der Entwicklung von $U(x, y)$ im Kopplungsterm bis zur zweiten Ordnung; dies gibt folgende Beiträge zur Wirkung:

$$\begin{aligned} S_{SSS}^{(3)} &= -\frac{i}{6} e_0^3 \int \bar{\psi}(x) \left(\int_x^y A^\mu(z) dz_\mu \right)^3 K_2(x-y) (i \not{\partial} - m) \psi(y) dx dy \\ S_{SSK}^{(3)} &= -\frac{1}{2} e_0^3 \int \bar{\psi}(x) \left(\int_x^y A^\mu(z) dz_\mu \right)^2 K_2(x-y) \not{A}(y) \psi(y) dx dy \quad (3.51) \end{aligned}$$

Schließlich hat man noch (19) und (20), die aus der Entwicklung von $U(x, y)$ bis zur ersten Ordnung in der Einfügung des freien Elektronpropagators bzw.

aus der Einfügung im Kopplungsterm stammen. Sie liefern folgende Beiträge zur Wirkung:

$$\begin{aligned} S_{IeS}^{(3)} &= ie_0 \int \bar{\psi}(x) [\delta(x-y) - K_2(x-y)] \int_x^y A^\mu(z) dz_\mu (i \not{\partial} - m) \psi(y) dx dy \\ S_{IeK}^{(3)} &= e_0 \int \bar{\psi}(x) [\delta(x-y) - K_2(x-y)] \not{A}(y) \psi(y) dx dy. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Bei der Entscheidung, ob ein Graph 1PR ist, sind Kürzungen in inneren Linien zu berücksichtigen, beispielsweise:

=

Der zweite Graph ist hier 1PR, obwohl er auf den ersten Blick irreduzibel aussieht.

Für die Berechnung der Betafunktion benötigt man die renormierte Kopplungskonstante; diese erhält man mit Hilfe der Vertex-Renormierungskonstante Z_1 , welche folgendermaßen definiert ist:

$$\Gamma^\mu(p, k)|_{\not{p}=m, k=0} = \gamma^\mu Z_1^{-1}. \quad (3.53)$$

Strings in einlaufenden Elektronlinien tragen einen Faktor $\not{p} - m$ bei — wenn man Z_1 berechnet, ergeben solche Graphen also 0. Außerdem ergeben sich wieder Kürzungen in inneren Linien, so daß sich wiederum einige Graphen, die dadurch bis auf ein unterschiedliches Vorzeichen identisch werden, gegenseitig wegheben: (4) mit (13), (5) mit (14), (6) mit (16), (8) mit (15) und (12) mit (18). Der Graph (20) ergibt zusammen mit (K) schließlich:

$$\left[\tilde{K}_2(m^2) + \delta^2(1 - \tilde{K}_2(m^2)) \right] \gamma^\mu. \quad (3.54)$$

Letztlich hat man also nur noch ein zusätzliches Integral auszurechnen:

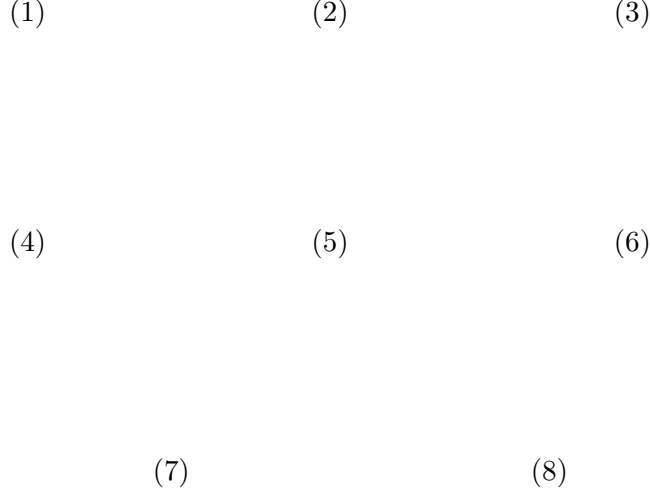
$$\Gamma^\mu(p, k)|_{\not{p}=m, k=0} = \left[\tilde{K}_2(m^2) + \delta^2(1 - \tilde{K}_2(m^2)) \right] \gamma^\mu + \frac{i\delta^2 e_0^2}{(2\pi)^d} \int d^d q \gamma_{(2)}^\mu(q) \quad (3.55)$$

mit

$$\gamma_{(2)}^\mu(q) = -\gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\tilde{K}_2(m^2)}{(q^2 + i\epsilon) \tilde{K}_3(q^2)} \Big|_{\not{p}=m, k=0}. \quad (3.56)$$

Der Photonformfaktor liefert folgenden Beitrag:

$$\frac{1}{\tilde{K}_3(k^2)} = \frac{1}{\tilde{K}_3(\infty)} + \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \int \frac{\sigma_3(\mu^2) \mu^2 d\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} = 1 + \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \int \frac{\rho_3(\mu^2) \mu^2 d\mu^2}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (3.57)$$

Abbildung 3.4: Elektron-Photon-Vertex bis zur Ordnung δ^3 : (1)-(8)

wenn man die Formfaktoren bei ∞ auf 1 normiert — dies ist für die Berechnung der unendlichen Anteile praktischer, wie aus der φ^3 -Theorie bekannt ist. Die Ergebnisse sind hier zwar nicht unabhängig von der gewählten Normierung, die Unterschiede sind aber nur quantitativer Natur, und man erhält qualitativ dieselben Aussagen, wie eine genauere Untersuchung ergibt. Deshalb soll hier nur die einfachere Variante dargestellt werden; alle wesentlichen Aussagen sieht man auch daran schon.

Nur der erste Term liefert einen divergenten Beitrag — man hat also bis auf einen Vorfaktor $\tilde{K}_2(m^2)$ gerade den üblichen Beitrag dritter Ordnung.

Mit dieser Normierung der Formfaktoren sind dann die Wellenfunktions-Renormierungskonstanten:

$$Z_2 = \frac{1}{\tilde{K}_2(m^2)} \left(1 + \delta^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{K}_2(m^2)} \right) + \delta^2 e_0^2 \frac{\hat{\Sigma}'(m)}{\tilde{K}_2(m^2)} \right) \quad (3.58)$$

$$Z_3 = \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \left(1 + \delta^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \right) + \delta^2 e_0^2 \frac{\Pi(0)}{\tilde{K}_3(0)} \right). \quad (3.59)$$

Wenn man das bekannte Ergebnis für die Vertex-Renormierungskonstante (für $d = 4 - 2\epsilon$) verwendet, so erhält man:

$$Z_1 = \frac{1}{\tilde{K}_2(m^2)} \left(1 + \delta^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{K}_2(m^2)} \right) - \frac{\delta^2 e_0^2}{16\pi^2 \epsilon} \right), \quad (3.60)$$

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

(19)

(20)

Abbildung 3.5: Elektron-Photon-Vertex bis zur Ordnung δ^3 : (9)-(20)

und schließlich ist die renormierte Ladung:

$$\begin{aligned}
 e &= \delta e_0 \frac{Z_2 \sqrt{Z_3}}{Z_1} = \frac{\delta e_0}{\sqrt{\tilde{K}_3(0)}} \left(1 + \frac{1}{2} \delta^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \right) \right) \\
 &+ \delta^2 e_0^2 \left(\frac{\hat{\Sigma}'(m)}{\tilde{K}_2(m^2)} + \frac{\Pi(0)}{2\tilde{K}_3(0)} + \frac{1}{16\pi^2\epsilon} \right) + O(\delta^5). \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

3.8 Betafunktion und anomale Dimensionen

Mit den üblichen Definitionen hat man:

$$\beta = 2\epsilon^2 \frac{de}{d\epsilon} = -e^3 2\epsilon \left(\hat{\Sigma}'(m) \frac{\tilde{K}_3(0)}{\tilde{K}_2(m^2)} + \frac{1}{2} \Pi(0) \right) - \frac{e^3 \tilde{K}_3(0)}{8\pi^2} + O(\delta^5) \quad (3.62)$$

$$\gamma_e = 2\epsilon^2 \frac{d \ln \sqrt{Z_2}}{d\epsilon} = -e^2 \epsilon \hat{\Sigma}'(m) \frac{\tilde{K}_3(0)}{\tilde{K}_2(m^2)} + O(\delta^4) \quad (3.63)$$

$$\gamma_{ph} = 2\epsilon^2 \frac{d \ln \sqrt{Z_3}}{d\epsilon} = -e^2 \epsilon \Pi(0) + O(\delta^4), \quad (3.64)$$

wobei benutzt wurde, daß in niedrigster Ordnung $e = \delta e_0 / \sqrt{\tilde{K}_3(0)}$ ist, und daß die divergenten Anteile in $\hat{\Sigma}'(m)$ und $\Pi(0)$ proportional $1/\epsilon$ sind.

Im Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ tragen nur die divergenten Anteile in $\Pi(0)$ bzw. $\hat{\Sigma}'(m)$ bei:

$$\Pi(0) = \frac{1}{\epsilon} \sum \hat{\pi}_{(i)} + \text{endlich} \quad (3.65)$$

$$\hat{\Sigma}'(m) = \frac{1}{\epsilon} \sum \hat{\sigma}_{(i)} + \text{endlich}. \quad (3.66)$$

Bei der Vakuumpolarisation trägt $\pi_{(3)}$ den bekannten Faktor $\frac{-1}{12\pi^2}$ bei; die anderen beiden Terme ($\pi_{(2)}$ und $\pi_{(5)}$) sollten nach naivem power-counting eigentlich auch divergente Beiträge liefern — die explizite Rechnung ergibt jedoch, daß sie endlich sind. γ_{ph} ist also in dieser Ordnung unabhängig von beiden Spektralfunktionen.

Die Berechnung der divergenten Anteile in der Selbstenergie ist komplizierter: Terme, die scheinbar konvergent sind, haben in Wirklichkeit divergente Anteile — dies tritt immer dann auf, wenn ein Stringparameter gleich 0 wird und dadurch Potenzen von k im Nenner unterdrückt werden. Der einzige Term, der sofort ausgerechnet werden kann, ist $\sigma_{(4)}$; bis auf den Vorfaktor $\tilde{K}_2(q^2)$ und den modifizierten Photonpropagator ist er identisch zur üblichen Selbstenergie. Der Photonpropagator kann wiederum entwickelt werden, dann ergibt sich der Beitrag zu:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(4)} &= \left(\frac{\partial}{\partial \not{q}} \left[-\tilde{K}_2(q^2) \frac{\not{q} - 4m}{16\pi^2} \right] \right)_{q=m} \\ &= \frac{-\tilde{K}_2(m^2)}{16\pi^2} + \frac{\tilde{K}_2(m^2)}{16\pi^2} \int \frac{6m^2}{m^2 - \mu^2 + i\epsilon} \rho_2(\mu^2) d\mu^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

In $\sigma_{(5)}$ substituiere zunächst $k' = ks$; dies ergibt einen Faktor s^{-d} . Dann entwickle nach s ; beim Elektronformfaktor verfare dabei folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{K}_2((q - k'/s)^2)} &= 1 + \frac{1}{\tilde{K}_2(m^2)} \int \frac{\sigma_2(\mu^2)(\mu^2 - m^2) d\mu^2}{(k'/s - q)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\ &= 1 + \frac{s^2}{\tilde{K}_2(m^2)} \int \frac{\sigma_2(\mu^2)(\mu^2 - m^2) d\mu^2}{k'^2 + i\epsilon} + O(s^3) \end{aligned} \quad (3.68)$$

und äquivalent für den Photonformfaktor. Man erhält schließlich einen Term proportional zu s^{3-d} und Terme mit höheren Potenzen in s ; ersterer liefert

nach Integration von 0 bis 1 einen Beitrag $1/(4-d) = 1/2\epsilon$, die anderen sind endlich. Es ergibt sich dann:

$$\hat{\sigma}_{(5)} = \frac{\tilde{K}_2^2(m^2)}{16\pi^2} \int_{m^2}^{\infty} \rho_2(\mu^2) d\mu^2 = \frac{\tilde{K}_2(m^2)(1 - \tilde{K}_2(m^2))}{16\pi^2}. \quad (3.69)$$

Für $\sigma_{(7)}$ benötigt man zwei Parameter: $t = s - s'$ und $t' = (s + s' - 1)/2$. Die Jacobideterminante ist 1, und die Integrale laufen von 0 bis 1 bzw. von $-(1-t)/2$ bis $(1-t)/2$. Das t' -Integral ergibt also einen Faktor $(1-t)$, die Substitution $k' = kt$ und die anschließende Entwicklung nach t wieder einen divergenten Term:

$$\hat{\sigma}_{(7)} = \frac{2(1 - \tilde{K}_2(m^2))}{16\pi^2}. \quad (3.70)$$

$\sigma_{(3)}$ liefert einen divergenten Beitrag nur dann, wenn s und s' gleichzeitig gegen 0 gehen - bei der Berechnung des divergenten Anteils dieses Terms kann man sich also auf den Bereich $s + s' < 1$ beschränken. Substituiere $s = rt$ und $s' = r(1-t)$; die Jacobideterminante ist r , und die Integrale laufen ebenfalls von 0 bis 1. Substituiere dann $k' = kr$ und entwickle nach r ; man erhält wiederum einen divergenten Term. Dieses übrigbleibende Integral, das einen quadratischen Beitrag in der Spektralfunktion liefert, ist allerdings nicht einfach analytisch auswertbar; schreibe dafür

$$\hat{\sigma}_{(3)} = \frac{\tilde{K}_2^2(m^2)}{16\pi^2} \int Q(\mu^2, \nu^2) \rho_2(\mu^2) \rho_2(\nu^2) d\mu^2 d\nu^2 \quad (3.71)$$

mit der nicht näher spezifizierten Funktion $Q(\mu^2, \nu^2)$.

Wie man sieht, sind die Betafunktion und γ_e nur über den Faktor $\tilde{K}_3(0)$ von ρ_3 abhängig. In beiden tritt dieser Faktor allerdings nur linear auf - eine Anwendung von PMS gibt hier also kein Extremum. Die Abhängigkeit von ρ_2 ist allerdings um einiges komplizierter:

$$\begin{aligned} \beta(e) &= \frac{e^3}{12\pi^2} - \frac{e^3}{8\pi^2} \frac{\tilde{K}_3(0)}{\tilde{K}_2(m^2)} \left(\tilde{K}_2(m^2)(1 - \tilde{K}_2(m^2)) + 2(1 - \tilde{K}_2(m^2)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{K}_2^2(m^2) \int_{m^2}^{\infty} Q(\mu^2, \nu^2) \rho_2(\mu^2) \rho_2(\nu^2) d\mu^2 d\nu^2 \right) \\ &= \frac{e^3}{12\pi^2} - \frac{\tilde{K}_3(0)e^3}{8\pi^2} \left(1 + \int \rho_2(\mu^2) d\mu^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int Q(\mu^2, \nu^2) \rho_2(\mu^2) \rho_2(\nu^2) d\mu^2 d\nu^2 - 1}{1 + \int \rho_2(\mu^2) d\mu^2} \right) \\ &=: \frac{e^3}{12\pi^2} - \frac{\tilde{K}_3(0)e^3}{8\pi^2} F[\rho_2] \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\gamma_e(e) = \frac{\tilde{K}_3(0)e^2}{16\pi^2} - \frac{\tilde{K}_3(0)e^2}{16\pi^2} F[\rho_2], \quad (3.73)$$

wobei das Funktional $F[\rho_2]$ durch den Klammerausdruck in der Betafunktion definiert ist.

Für $\rho_2(\mu^2) = \rho_3(\mu^2) = 0$, also $\tilde{K}_2(m^2) = \tilde{K}_3(0) = 1$, erhält man die aus der üblichen Störungstheorie bekannten Ergebnisse $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$, $\gamma_e(e) = \frac{e^2}{16\pi^2}$, $\gamma_{ph}(e) = \frac{e^2}{12\pi^2}$.

FAC kann wiederum nicht angewandt werden, da dies die niedrigste nicht-verschwindende Ordnung ist; bei PMS muß die Ableitung nach beiden Spektralfunktionen gleich Null gesetzt werden — da aber $\tilde{K}_3(0)$ nur linear vorkommt, existiert keine Lösung für dieses Variationsproblem.

Da beide Optimierungsmethoden in dieser Ordnung nicht anwendbar sind, betrachte die nächsthöhere Ordnung ($\delta^5 e^3$). Hierfür hat man wiederum zwei Beiträge. Zunächst ist die renormierte Ladung:

$$e = \frac{\delta e_0}{\sqrt{\tilde{K}_3(0)}} \left(1 + \frac{1}{2} \delta^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \right) \right) + O(\delta^2 e_0^2), \quad (3.74)$$

also hat man

$$\left(\frac{\delta e_0}{\sqrt{\tilde{K}_3(0)}} \right)^n = e^n \left(1 - \frac{n}{2} \delta^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{K}_3(0)} \right) \right) + \dots \quad (3.75)$$

$$\frac{\delta^2 e_0^2}{\tilde{K}_3(0)} \stackrel{\delta \equiv 1}{=} \frac{e^2}{\tilde{K}_3(0)} \quad (3.76)$$

$$\frac{\delta^3 e_0^3}{\tilde{K}_3^{3/2}(0)} \stackrel{\delta \equiv 1}{=} e^3 \left(\frac{3}{2\tilde{K}_3(0)} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.77)$$

Außerdem sind nun auch Graphen mit Einfügungen der freien Propagatoren in den inneren Linien zu berücksichtigen. Dies führt zu folgenden Ersetzungen:

$$\begin{aligned} S(q) &= \frac{1}{(\not{q} - m + i\epsilon)\tilde{K}_2(q^2)} \rightarrow S(q)(1 - \tilde{K}_2(q^2))(\not{q} - m)S(q) \\ &= S(q) \left(\frac{1}{\tilde{K}_2(q^2)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(q) &= \frac{-g^{\mu\nu}}{(q^2 + i\epsilon)\tilde{K}_3(q^2)} \rightarrow D^{\mu\lambda}(q)(1 - \tilde{K}_3(q^2))(-g_{\lambda\rho}q^2 + q_\lambda q_\rho)D^{\rho\nu}(q) \\ &= \left(D^{\mu\nu}(q) + \frac{q^\mu q^\nu / q^2}{(q^2 + i\epsilon)\tilde{K}_3(q^2)} \right) \left(\frac{1}{\tilde{K}_3(q^2)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Man kann die Ausdrücke in den Klammern folgendermaßen entwickeln:

$$\frac{1}{\tilde{K}_2(q^2)} - 1 = \frac{1}{1 + \tilde{K}_2(m^2) \int \frac{\rho(\mu^2)(\mu^2 - m^2)}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon}} - 1 = O(q^{-2}), \quad (3.80)$$

d. h., jede Einfügung bringt in den zu berechnenden Integralen einen weiteren Faktor q^2 in den Nenner. Da sämtliche Integrale vorher maximal logarithmisch

divergent waren, liefern also die Graphen mit Einfügungen nur endliche Beiträge zu $\Pi(0)$ und $\hat{\Sigma}'(m)$ und damit keine Beiträge zur Betafunktion und den anomalen Dimensionen.

Insgesamt hat man nun folgende Änderungen:

$$\beta(e) = \frac{e^3}{8\pi^2\tilde{K}_3(0)} - \frac{e^3}{24\pi^2} - \frac{3e^3}{16\pi^2}F[\rho_2] + \frac{\tilde{K}_3(0)e^3}{16\pi^2}F[\rho_2] \quad (3.81)$$

$$\gamma_e(e) = \frac{e^2}{16\pi^2} - \frac{e^2}{16\pi^2}F[\rho_2] \quad (3.82)$$

$$\gamma_{ph}(e) = \frac{e^2}{12\pi^2\tilde{K}_3(0)}. \quad (3.83)$$

FAC führt hier für alle drei Größen sofort auf $\tilde{K}_3(0) = 1$ und damit auf $\rho_3(\mu^2) \equiv 0$, also das erwartete Ergebnis: Einbeziehung der Zwei-Loop-Graphen $\sim \delta^4 e_0^4$ würde ein nicht-pertubatives Ergebnis für $\tilde{K}_3(q^2)$ ergeben, das im Limes kleiner Kopplungskonstante das übliche Resultat $\tilde{K}_3(q^2) \equiv 1$ liefert. Über $\tilde{K}_2(q^2)$ erhält man allerdings keine Aussage!

PMS gibt bei den anomalen Dimensionen keine Lösung, da die Variation nach $\tilde{K}_3(0)$ kein Ergebnis liefert; bei der Betafunktion dagegen hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\beta}{\partial\tilde{K}_3(0)} = 0; \quad \frac{\delta\beta}{\delta\rho_2(p^2)} = 0 \quad \forall p^2 \geq m^2 \quad (3.84)$$

zu erfüllen. Dies führt auf

$$\tilde{K}_3(0) = \sqrt{\frac{2}{F[\rho_2]}}; \quad \frac{\delta F[\rho_2]}{\delta\rho(p^2)} = 0 \quad \forall p^2 \geq m^2. \quad (3.85)$$

Allerdings ist die in $F[\rho]$ enthaltene quadratische Funktion $Q(\mu^2, \nu^2)$, wie oben schon erwähnt, nicht analytisch bestimmbar. Damit ist es also nicht möglich, eine (analytische) Lösung für dieses Gleichungssystem anzugeben.

Kapitel 4

Zusammenfassung

Bei diesem allgemeinen Ansatz für die Wirkung scheint die optimierte δ -Entwicklung problematisch zu sein, speziell dann, wenn man versucht, mit renormierten Größen zu arbeiten. Dies steht im Gegensatz zu den Erfolgen, die in quantenmechanischen Modellen (z. B. der anharmonische Oszillator) oder mit einfacheren Ansätzen für die Wirkung (z. B. in [8]) erzielt wurden.

In [8], wo der einfache Ansatz versucht wurde, die Wirkung mit einer Konstante zu skalieren, gab es zwar keine grundsätzlichen Probleme, aber die Konstante fiel durch die Renormierung heraus, so daß man die Optimierungsmethoden auf renormierte Größen nicht anwenden konnte. Allerdings ergaben sich dort interessante Beziehungen zwischen den renormierten und den nackten Kopplungskonstanten, die beispielsweise gestatten, bereits in Ein-Loop-Ordnung Aussagen über die Trivialität von φ^4 -Theorie, Quantenelektro- und -chromodynamik zu erhalten.

Diesen Kürzungen entspricht im allgemeineren Ansatz mit einem Formfaktor der Tatsache, daß sich die Normierung des Formfaktors an mehreren Stellen herauskürzt. Deswegen kann man dort die Normierung des Formfaktors frei wählen; es ergab sich, daß es für die Betrachtung von renormierten Größen praktisch ist, die Formfaktoren am Renormierungspunkt auf 1 zu normieren, bei der Berechnung der Betafunktion und der anomalen Dimensionen vereinfachen sich die Rechnungen, wenn man bei ∞ auf 1 normiert.

Es ist jedoch immer darauf zu achten, ob die Ergebnisse wirklich unabhängig von der Normierung sind! Bei der Betafunktion in der Quantenelektrodynamik wurde beispielsweise mit der Normierung 1 bei ∞ gearbeitet, obwohl sich die Normierung dort nicht überall herauskürzt; eine genauere Untersuchung ergibt jedoch, daß sich auch mit dem allgemeineren Ansatz die Ergebnisse nur quantitativ ändern; an der Problematik ändert sich dadurch nichts.

Wird dagegen der allgemeine Formfaktor-Ansatz verwendet, so bekommt man schon bei der Renormierung Schwierigkeiten. Diese konnten hier zwar teilweise umgangen werden, indem man in den Kopplungs- und Massentermen die Aufspaltung geschickt wählte: es wurden zusätzliche impulsabhängige Funktionen eingeführt, die für $\delta = 1$ verschwinden. Ein befriedigendes Resultat ergab sich dennoch nur in der skalaren Feldtheorie. In der Quantenelektrodynamik war es dagegen nicht möglich, alle Divergenzen loszuwerden. Dies ist letztlich

darauf zurückzuführen, daß man δ als Kopplungskonstante betrachten kann — man sieht dann leicht, daß die Theorie für allgemeines δ nicht renormierbar ist.

In der skalaren Theorie, wo man dann einen endlichen Propagator erhielt, war nur FAC anwendbar — PMS dagegen führte auf das triviale Ergebnis, daß die Spektralfunktion verschwindet und damit der Formfaktor zu eins wird - also zurück auf die normale Störungstheorie. Für den mittels FAC optimierten Propagator ergab sich dann ein (numerisches) Ergebnis. Dort trat dann allerdings ein merkwürdiges Ergebnis auf: Obwohl die Kopplungskonstante sehr groß gewählt wurde ($g = \sqrt{128\pi^3\alpha}$; $\alpha = 1 \Rightarrow g \approx 63$), ergaben sich kaum Unterschiede (maximal 2 Prozent) zwischen dem üblichen und dem modifizierten, optimierten Propagator. Dies scheint der Tatsache zu widersprechen, daß der optimierte Propagator nicht nur die Terme aus der 1. Ordnung der üblichen Störungstheorie enthält, sondern auch solche aus jeder beliebig hohen Ordnung. Eine Erklärung hierfür existiert bisher nicht.

Um den Schwierigkeiten bei der Renormierung zu entgehen, wurden dann in beiden Fällen auch noch Größen wie die Betafunktion und die anomalen Dimensionen betrachtet. Hier ergaben sich keine Probleme mit den Divergenzen, und man konnte die Optimierungsverfahren auf die berechneten Größen anwenden. FAC war in dieser niedrigsten Ordnung (δ^2 bzw. δ^3) allerdings nicht anwendbar, da keine andere Ordnung zum Vergleich zur Verfügung stand. PMS lieferte in der skalaren Theorie zwar Ergebnisse, diese stimmten jedoch nicht mit denen der üblichen Störungstheorie überein und waren von der Kopplungskonstante unabhängig. Also erhält man auch im Limes kleiner Kopplungskonstante nicht, wie verlangt, das Ergebnis der üblichen Störungstheorie. In der Quantenelektrodynamik lieferte PMS dagegen überhaupt keine Lösung, da sämtliche berechneten Größen vom Photonenformfaktor unabhängig oder nur linear abhängig waren. Praktisch dieselben Probleme traten bereits in [10] auf; die Hoffnung, daß diese Probleme in einfacheren Feldtheorien als der QCD gelöst werden können, hat sich nicht erfüllt.

Ebenso ergaben sich dieselben Probleme, wenn man auch noch höhere Ordnungen ($\delta^4 g_0^2$ bzw. $\delta^5 g_0^3$) berücksichtigte: PMS lieferte unphysikalische Resultate. FAC dagegen ergab das vernünftige Ergebnis, daß der Formfaktor zu eins wird (im Falle der Quantenelektrodynamik nur für den Photonenformfaktor, über den Elektronenformfaktor war keine Aussage möglich). Eine Einbeziehung der Zwei-Loop-Ordnung und anschließender Grenzübergang $\alpha \rightarrow 0$ würde also nur bei FAC das Ergebnis der normalen Störungstheorie liefern, wie es auch sein sollte. PMS dagegen versagt anscheinend — wie auch schon in [10].

Zusammenfassend: Die Anwendung der optimierten δ -Entwicklung in einer möglichst allgemeinen Form stößt in der Quantenfeldtheorie auf große Schwierigkeiten. Teilweise konnten sie behoben werden, wie z. B. das Problem der Divergenz des Propagators in der skalaren Theorie, aber es bleiben immer noch Probleme offen. PMS ist in vielen Fällen entweder überhaupt nicht anwendbar oder führt auf unsinnige Resultate. FAC liefert nichttriviale Ergebnisse. Hier würde eine Zwei-Loop-Rechnung wahrscheinlich interessante, nicht-perturbative Ergebnisse liefern. Zumindest in der skalaren Theorie wäre der Rechenaufwand

nicht allzu hoch, da man nur die Graphen der üblichen Störungstheorie mit modifizierten Propagatoren auszurechnen hat. In der Quantenelektrodynamik dagegen erhält man zahlreiche zusätzliche Graphen aus den String-Einfügungen — wie schon in der Quantenchromodynamik wäre dort also die Berechnung höherer Ordnungen relativ kompliziert.

Anhang A

Ein-Loop-Beitrag zur Selbstenergie des skalaren Feldes

Zu berechnen ist der Ausdruck (2.36). Benutzt man die modifizierten Feynman-Regeln, die in Abschnitt 2.1 dargelegt wurden, und die Dispersionsrelation (2.12), so hat man:

$$\begin{aligned}
 \Lambda(p^2, s^2, t^2) &= -\frac{1}{\alpha_0 \pi(p^2 - M^2)} \operatorname{Im} \left[\frac{ig_0^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{z(M^2)}{k^2 - s^2 + i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. \frac{z(M^2)}{(p-k)^2 - t^2 + i\epsilon} \right] \\
 &= -\frac{M^{6-d}}{\pi(\pi)^{d/2}(p^2 - M^2)} \operatorname{Im} \left[i \int_0^1 dx \int d^d k \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{(k^2 + x(1-x)p^2 - xs^2 - (1-x)t^2 + i\epsilon)^2} \right]. \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Normierung $z(M^2) = 1$ benutzt, die Definition (2.8) von α_0 eingesetzt und für das Integral ein Feynman-Parameter x eingeführt. Nach Ausführung des Integrals hat man dann:

$$\Lambda(p^2, s^2, t^2) = \frac{M^{6-d}}{\pi(p^2 - M^2)} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 \operatorname{Im}(x^2 p^2 + (s^2 - t^2 - p^2)x + t^2 - i\epsilon)^{d/2-2}. \quad (\text{A.2})$$

Benutze nun (für $c > 0$):

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(-c - i\epsilon)^{d/2-2} &= c^{d/2-2} \operatorname{Im}(-1 - i\epsilon)^{d/2-2} = c^{d/2-2} \operatorname{Im}e^{(d/2-2)(-i(\pi-\eta))} \\
 &= c^{d/2-2} \sin((d/2 - 2)(-(\pi - \eta))) = -c^{d/2-2} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right). \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

Man muß in der obigen Formel also das Intervall $[x_1, x_2]$ finden, für das das Polynom $x^2 p^2 + (s^2 - t^2 - p^2)x + t^2$ kleiner 0 wird, zwischen diesen beiden

Nullstellen dann den Betrag des Polynomes integrieren und das Ergebnis mit $-\sin(\pi d/2)$ multiplizieren.

Eine Untersuchung des Polynoms ergibt, daß nur für $p^2 \geq (s+t)^2$ Nullstellen im Intervall $[0, 1]$ existieren; sie sind dann:

$$x_{1/2} = \frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2} \pm \frac{\sqrt{(p^2 - (s+t)^2)(p^2 - (s-t)^2)}}{2p^2}. \quad (\text{A.4})$$

Nun ist also:

$$\begin{aligned} \Lambda(p^2, s^2, t^2) &= -\frac{M^{6-d}}{\pi(p^2 - M^2)} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \theta(p^2 - (s+t)^2) \\ &\quad \int_{x_1}^{x_2} \left(-x^2 - \frac{s^2 - t^2 - p^2}{p^2}x - \frac{t^2}{p^2}\right)^{d/2-2} dx (p^2)^{d/2-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Forme die Klammer folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} &\left(-x^2 - \frac{s^2 - t^2 - p^2}{p^2}x - \frac{t^2}{p^2}\right)^{d/2-2} \\ &= \left(\left(\frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}\right)^2 - \frac{t^2}{p^2} - \left(x - \frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}\right)^2\right)^{d/2-2} \\ &= \left(\left(\frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}\right)^2 - \frac{t^2}{p^2}\right)^{d/2-2} \left(1 - \left(\frac{x - \frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}}{\sqrt{\left(\frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}\right)^2 - \frac{t^2}{p^2}}}\right)^2\right)^{d/2-2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

und substituiere dann:

$$\cos \alpha = \frac{x - \frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}}{\sqrt{\left(\frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}\right)^2 - \frac{t^2}{p^2}}}, \quad (\text{A.7})$$

dann ist $\cos \alpha_{1/2} = \mp 1$, und das Integral wird:

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}\right)^2 - \frac{t^2}{p^2}\right)^{d/2-3/2} \int_0^\pi \sin^{d-3}(\alpha) \\ &= \left(\left(\frac{p^2 - s^2 + t^2}{2p^2}\right)^2 - \frac{t^2}{p^2}\right)^{d/2-3/2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Hierbei wurde die Betafunktion:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A.9})$$

für $x = d/2 - 1$, $y = 1/2$ verwendet.

Setzt man dies oben ein, so erhält man schließlich das in Abschnitt 2.4 angegebene Ergebnis:

$$\Lambda(p^2, s^2, t^2) = \frac{-M^{6-d} 2^{3-d} \theta(p^2 - (s+t)^2)}{\sqrt{\pi}(p^2 - M^2)(p^2)^{d/2-1}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{d}{2} - \frac{1}{2})} (p^4 - 2p^2(s^2 + t^2) + (s^2 - t^2)^2)^{d/2-3/2}. \quad (\text{A.10})$$

Anhang B

Numerische Lösung der Integralgleichung für die Spektralfunktion des skalaren Propagators

Die relevanten Gleichungen sind:

$$\begin{aligned}\rho(q^2) &= \alpha \frac{\bar{K}(q^2) \operatorname{Re} z(q^2)}{1 - \alpha \operatorname{Re} \bar{\sigma}(q^2)} \\ \bar{K}(q^2) &= K(q^2, M^2, M^2) + 2 \int_{4M^2}^{\infty} K(q^2, M^2, s^2) \hat{\rho}(s^2) ds^2 \\ &\quad + \int_{4M^2}^{\infty} K(q^2, s^2, t^2) \hat{\rho}(s^2) \hat{\rho}(t^2) ds^2 dt^2 \\ K(q^2, s^2, t^2) &= \frac{\Lambda(q^2, s^2, t^2)}{p^2 - M^2} \\ &= \frac{\theta(p^2 - (s+t)^2)}{6p^4(p^2 - M^2)^2} (p^4 - 2p^2(s^2 + t^2) + (s^2 - t^2)^2)^{3/2} \\ \operatorname{Re} z(q^2) &= 1 + (q^2 - M^2) P \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\rho(p^2)}{q^2 - p^2} dp^2 \\ \operatorname{Re} \bar{\sigma}(q^2) &= (q^2 - M^2) P \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\bar{K}(p^2)}{q^2 - p^2} dp^2. \tag{B.1}\end{aligned}$$

Gehe nun zunächst zu dimensionslosen Größen über:

$$\begin{aligned}q^2/M^2 &\rightarrow q; \quad s^2/M^2 \rightarrow s; \quad \dots \quad dq^2 \rightarrow M^2 dq; \quad \dots \\ M^2 \rho(q^2) &\rightarrow \rho(q); \quad M^2 K(p^2, s^2, t^2) \rightarrow K(p, s, t); \quad \dots\end{aligned} \tag{B.2}$$

Anschließend bilde das Integrationsintervall $[4M^2, \infty)$ auf $[0,1)$ ab:

$$\begin{aligned} 4^{1/(1-x)} &:= q \implies dq = \frac{4}{(1-x)^2} dx; & 4^{1/(1-y)} &:= p; \dots \\ r(x) &:= \rho(q); & \text{zre}(x) &:= \text{Re } z(q); & k(x, u, v) &:= K(q, s, t) \\ \text{sigma1}(x) &:= \text{Re } \bar{\sigma}(q); & k1(x) &:= \bar{K}(q); \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Die Terme in $\bar{K}(q^2)$ tragen bei für $q^2 > 4M^2$, $> 9M^2$ bzw. $> 16M^2$. Nach der Variablensubstitution werden diese Grenzen zu $x > 0$, $> 5/9$ bzw. $> 3/4$.

Die Iteration wird mit $r(x) \equiv 0$ gestartet; im ersten Schritt erhält man also die Selbstenergie ($\text{sigma0}(x)$ und $\text{sigmaim0}(x)$) der normalen Störungstheorie.

In jedem Iterationsschritt wird für h Stützstellen x_i (hier: $h = 100$) zunächst $\text{zre}(x_i)$ und $k1h(x_i)$ berechnet; aus zweiterem wird dann $k1(x)$ interpoliert. Damit kann dann das Hauptwertintegral für $\text{sigma1}(x_i)$ ausgerechnet werden und aus allen diesen Größen schließlich $\text{rh}(x_i)$. Mit dem mittels Interpolation hieraus gewonnenen neuen $r(x)$ kann dann der nächste Iterationsschritt begonnen werden. Das jeweils vorherige $r(x)$ wird zu $\text{rold}(x)$; ein Vergleich der beiden kann verwendet werden, um die Abbruchbedingung für die Iteration festzulegen. Hier wurde als Bedingung gewählt, daß die relative Änderung der Funktion $r(x)$ in diesem Iterationsschritt auf dem gesamten Intervall kleiner als 0,1% war (s. Abb. B.1)

Nach beendeter Iteration (hier: 33 Schritte) kann nun $\text{zre}(x)$ (also $\text{Re } z(q^2)$) mittels des Hauptwertintegrals über $r(x)$ berechnet werden, was hier für $q^2 > 0.25$ (entsprechend $x > -15$) getan wurde. Außerdem wird aus $\text{sigma0}(x)$ und $\text{sigmaim0}(x)$ nun das Ergebnis der normalen Störungstheorie für die Spektralfunktion $\text{r0}(x)$ berechnet und schließlich die Differenz der beiden Spektralfunktionen.

$$r^{(33)}(x)/r^{(32)}(x) - 1$$

x

Abbildung B.1: Relative Änderung von $r(x)$ im letzten Iterationsschritt

Auf der nächsten Seite ist das komplette Mathematica-Programm dargestellt, mit dem diese Rechnungen durchgeführt wurden.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Einteilchen-irreduzible Anteile im Propagator	10
2.2	Spektralfunktion $\rho(q^2)$	16
2.3	Formfaktor $z(q^2)$	16
2.4	Spektralfunktion $\rho^{(0)}(q^2)$	17
2.5	Differenz der Spektralfunktionen	18
2.6	Ein-Loop-Beitrag zum Dreiervertex des skalaren Feldes (alle Impulse einlaufend)	19
2.7	Divergente Beiträge durch Einfügung in innere Linien	21
3.1	Feynman-Diagramme für $S_{\delta QED}$	25
3.2	Beiträge zur Vakuumpolarisation bis zur Ordnung δ^2	27
3.3	Beiträge zur Selbstenergie des Elektrons bis zur Ordnung δ^2	29
3.4	Elektron-Photon-Vertex bis zur Ordnung δ^3 : (1)-(8)	37
3.5	Elektron-Photon-Vertex bis zur Ordnung δ^3 : (9)-(20)	38
B.1	Änderung im letzten Iterationsschritt	52

Literaturverzeichnis

- [1] I.G.Halliday, P.Suranyi., Phys.Rev. D **21**, 1529 (1980).
- [2] P.M.Stevenson, Phys.Rev. D **23**, 2916 (1981).
- [3] P.M.Stevenson, Phys.Rev. D **30**, 1712 (1984); P.M.Stevenson, Phys.Rev. D **32**, 1389 (1985).
- [4] C.M.Bender, K.A.Milton, M.Moshe, S.S.Pinsky, L.M.Simmons, Phys.Rev. D **37**, 1472 (1988).
- [5] H.F.Jones, M.Monoyios, Int.J.Mod.Phys. A **4**, 1735 (1989).
- [6] A.Duncan, M.Moshe, Phys.Lett. B **215**, 352 (1988).
- [7] H.F.Jones, Nucl.Phys. B (Proc.Suppl.) **16**, 592 (1990).
- [8] D.Gromes, Z.Phys. C **71**, 347 (1996).
- [9] A.Duncan, H.F.Jones, Phy.Rev. D **47**, 2560 (1993).
- [10] D.Gromes, hep-ph/9803494.
- [11] A.J.Macfarlane, G.Woo, Nucl.Phys. B **77**, 91 (1974).

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Prof. D. Gromes für die Vergabe dieses interessanten Themas und für die gute Betreuung bedanken. Er hatte immer ein offenes Ohr, auch für scheinbar triviale Fragen, und unterstützte mich stark beim Klären schwieriger konzeptioneller Fragen.

Außerdem danke ich Herrn Prof. Bender für die Übernahme der Zweitkorrektur.

Annabella Rauscher möchte ich für ihre Ratschläge zur Erstellung der Feynman-Graphen in \LaTeX danken.

Besonderer Dank gebührt auch Wouter Kornelis, Frank Otto und Michael Haas für anregende Diskussionen und Hilfestellung; außerdem nochmals Wouter Kornelis, Hannes Klehr, Birgit Schenkel und Vera Spillner für die Durchsicht und Korrektur der Arbeit.

Abschließend möchte ich noch meiner Familie, meinen Freunden und Sylvia Sabin und Vera Spillner für die seelische und moralische Unterstützung während der Anfertigung der Arbeit danken.

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den