

Allgemeine Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen

f sei eine ganzrationale Funktion vom Grad $n > 1$ mit Leitkoeffizient a , der Koeffizient von x^{n-1} sei b . Dann gilt:

Wenn n eine gerade Zahl > 2 ist, kann der Graph von f nur symmetrisch sein zur Achse $x = -\frac{b}{n \cdot a}$; das passiert genau dann, wenn $f'(-\frac{b}{na}) = f'''(-\frac{b}{na}) = \dots = f^{(n-3)}(-\frac{b}{na}) = 0$ ist. Dort hat der Graph dann auch einen Extrempunkt. Für $n = 2$ sind *alle* Graphen symmetrisch zur senkrechten Geraden durch ihren Extrempunkt (also den Scheitelpunkt).

Wenn n eine ungerade Zahl > 3 ist, kann der Graph nur symmetrisch sein zum Punkt $(-\frac{b}{n \cdot a} | f(-\frac{b}{n \cdot a}))$; das passiert genau dann, wenn $f''(-\frac{b}{na}) = f^{(4)}(-\frac{b}{na}) = \dots = f^{(n-3)}(-\frac{b}{na}) = 0$ ist. Dort hat der Graph dann auch einen Wendepunkt. Für $n = 3$ sind *alle* Graphen symmetrisch zu ihrem (einzigem) Wendepunkt.

Beweis: Zunächst werden die Fälle n gerade bzw. ungerade getrennt betrachtet.

- 1) n gerade: Der Graph von f kann nur dann symmetrisch zur Achse $x = x_0$ sein, wenn der Graph der Funktion g mit $g(x) = f(x + x_0)$ symmetrisch zur y -Achse ist. Das kann aber nur dann sein, wenn g nur gerade Exponenten hat. Das wiederum kann nur dann sein, wenn $g'(x_0) = g'''(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ ist. Und das wiederum kann nur dann sein, wenn $f'(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ist. Da g nur gerade Exponenten hat, hat g' nur ungerade Exponenten, der Graph von g' ist also symmetrisch zum Ursprung, und deshalb liegt bei der Nullstelle von g' und damit auch bei der Nullstelle von f' ein VZW vor, also hat der Graph von f dort einen Extrempunkt.
- 2) n ungerade: Der Graph von f kann nur dann symmetrisch zum Punkt $(x_0 | f(x_0))$ sein, wenn der Graph der Funktion g mit $g(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$ symmetrisch zum Ursprung ist. Das kann aber nur dann sein, wenn g nur ungerade Exponenten hat. Das wiederum kann nur dann sein, wenn $g''(x_0) = g^{(4)}(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ ist (beachte: $g(0) = 0$ ist automatisch erfüllt). Und das wiederum kann nur dann sein, wenn $f''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ist. Da g nur ungerade Exponenten hat, hat g'' ebenfalls nur ungerade Exponenten, der Graph von g'' ist also symmetrisch zum Ursprung, und deshalb liegt bei der Nullstelle von g'' und damit auch bei der Nullstelle von f'' ein VZW vor, also hat der Graph von f dort einen Wendepunkt.

Insbesondere die Bedingung $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ kann man noch allgemein auswerten (unabhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist). Denn die $(n-1)$. Ableitung einer ganzrationalen Funktion vom Grad n mit $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ ist $f^{(n-1)}(x) = a \cdot n! \cdot x + b \cdot (n-1)!$. Aus der Bedingung $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ folgt dann sofort $x_0 = -\frac{b}{n \cdot a}$, also kann es Symmetrie nur für diese Wahl von x_0 geben. Da für diese Wahl die Bedingung $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ dann aber automatisch erfüllt ist, muss man die Bedingung immer nur bis zur $(n-3)$. Ableitung prüfen. Für $n = 2$ und $n = 3$ sind damit keine Bedingungen mehr zu erfüllen, also sind in diesen Fällen alle Graphen symmetrisch.