Ist $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl?

Wenn das so wäre, dann könnte man $\sqrt{2}$ als Bruch schreiben:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

mit ganzen Zahlen p und q. Außerdem kann man diesen Bruch natürlich kürzen; nehmen wir an, er sei schon gekürzt (p und q haben also keinen Teiler gemeinsam!). Aus der Definition der Quadratwurzel folgt dann aber:

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

also $p^2 = 2\,q^2$ (Gleichung I). Daraus folgt aber, dass p eine gerade Zahl sein muss, also kann man schreiben:

$$p = 2\,k$$

mit irgendeiner ganzen Zahl k. Einsetzen in Gleichung I:

$$(2\,k)^2 = 2\,q^2,$$

also ist $4\,k^2 = 2\,q^2$, und daraus folgt $q^2 = 2\,k^2$. Daraus folgt aber, dass auch q eine gerade Zahl ist.

Aus der Annahme, dass man $\sqrt{2}$ als (gekürzten!) Bruch schreiben kann, folgt also letztlich, dass sowohl Zähler als auch Nenner dieses Bruchs gerade Zahlen sein müssen. Das widerspricht aber der Tatsache, dass der Bruch schon gekürzt sein soll (wenn Zähler und Nenner gerade Zahlen sind, kann man den Bruch noch mit 2 kürzen!).

Es folgt: man kann $\sqrt{2}$ eben nicht als Bruch schreiben – mit anderen Worten:

$$\boxed{\sqrt{2}\ \text{ist keine rationale Zahl.}}$$

Anmerkung: Dies ist ein sog. Widerspruchsbeweis.