

# Wiederholung: Stochastik aus Klasse 11

## Grundbegriffe

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der unter immer gleichartigen Bedingungen abläuft, dessen Ausgang sich aber nicht vorhersagen lässt. Jeden möglichen Ausgang eines Zufallsexperiments nennt man ein Ergebnis  $\omega$  (*kleiner griechischer Buchstabe omega*) des Experiments; die Menge aller möglichen Ergebnisse heißt Ergebnisraum  $\Omega$  (*großer griechischer Buchstabe Omega*); jedem möglichen Ausgang ist also genau ein Element aus  $\Omega$  zugeordnet. Die Anzahl der möglichen Ergebnisse heißt die Mächtigkeit von  $\Omega$ , geschrieben:  $|\Omega|$ .

Ist ein Zufallsexperiment aus einfacheren Zufallsexperimenten zusammengesetzt, die gleichzeitig oder nacheinander durchgeführt werden, so nennt man es mehrstufig. Zur Simulation mehrstufiger Zufallsexperimente können „Urnenexperimente“ verwendet werden: Eine Urne (eine „black box“, in die man nicht hinein sehen kann) enthält Kugeln, die den Ergebnissen eines Telexperiments entsprechen; aus der Urne werden dann blind Kugeln gezogen. Dabei muss man Zufallsexperimente unterscheiden, bei denen die Reihenfolge der gezogenen Kugeln (also der Ergebnisse) wichtig ist und solche, bei denen sie das nicht ist; außerdem Zufallsexperimente, bei denen die Kugeln nach dem Ziehen wieder zurück gelegt werden (also in jedem Telexperiment dieselben Ergebnisse möglich sind) und solche, bei denen sie das nicht werden (also in jedem Telexperiment nur die Ergebnisse auftreten können, die vorher noch nicht auftraten).

Zur übersichtlichen Darstellung eines Zufallsexperiments verwendet man oft ein Baumdiagramm. Der Anfang heißt die „Wurzel“ des Baumdiagramms, die Endpunkte heißen die „Blätter“, jeder Weg durch den Baum von der Wurzel zu einem Blatt heißt ein Pfad.

Ein Ereignis ist eine Teilmenge des Ergebnisraums; Ereignisse werden meist mit Großbuchstaben bezeichnet: A, B, C, ... oder auch  $E_1, E_2, \dots$ . Ein Elementarereignis ist ein Ereignis, das nur ein Ergebnis enthält. Das sichere Ereignis ist der Ergebnisraum selbst, das unmögliche Ereignis ist die leere Menge. Das Gegenereignis  $\bar{A}$  (gesprochen: „nicht A“) zu einem Ereignis A ist dasjenige Ereignis, das alle Ergebnisse aus  $\Omega$  enthält, die A nicht enthält.

Tritt ein Ereignis A oder ein Ereignis B (oder beide gleichzeitig) ein, so gehört dazu die Vereinigungsmenge der beiden Ereignisse,  $A \cup B$ . Tritt ein Ereignis A ein und (gleichzeitig) ein Ereignis B, so gehört dazu die Schnittmenge,  $A \cap B$ . Können zwei Ereignisse nicht beide gleichzeitig eintreten, ist ihre Schnittmenge also leer,  $A \cap B = \{\}$ , dann nennt man sie unvereinbar. Solche Verknüpfungen von Ereignissen stellt man oft in Venn-Diagrammen dar.

Regeln von de Morgan:  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ;  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Die absolute Häufigkeit  $H_n(E)$  eines Ereignisses E gibt an, wie oft (Anzahl) es bei n Wiederholungen des Zufallsexperiments auftrat. Die relative Häufigkeit  $h_n(E)$  gibt an, in welchem Anteil aller Wiederholungen das Ereignis auftrat (angegeben in Prozent, als Bruch oder als Kommazahl). Es gilt der Zusammenhang

$$h_n(E) = \frac{H_n(E)}{n}$$

Das Gesetz der großen Zahlen besagt: Die relative Häufigkeit jedes Ereignisses ist nach einer hinreichend großen Anzahl von Durchführungen eines Zufallsexperiments jeweils ungefähr gleich einem festen Zahlenwert. Diesen Zahlenwert nennt man die statistische Wahrscheinlichkeit  $P(E)$ . Die statistische Wahrscheinlichkeit gibt also an, mit welcher relativen Häufigkeit ein Ereignis bei häufiger Wiederholung eines Zufallsexperiments vermutlich eintreten wird.

## Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

grundlegende Rechenregeln (gelten analog auch für absolute und relative Häufigkeiten):

- 1)  $0 \leq P(E) \leq 1$  für alle Ereignisse  $E$ ; insbesondere:  $P(\{\}) = 0$  und  $P(\Omega) = 1$
- 2)  $P(\{\omega_1, \omega_2, \dots\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots$
- 3)  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind. Für alle Ereignisse gilt dann:  $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$ .

In einem Baumdiagramm gilt:

- Verzweigungsregel: Die von jedem Punkt ausgehenden Zweige tragen Wahrscheinlichkeiten, deren Summe jeweils 1 ist.
- 1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades durch das Baumdiagramm.
- 2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade (also Elementarereignisse).

Satz von Sylvester (gilt analog auch für Mächtigkeiten, absolute Häufigkeiten und relative Häufigkeiten):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Daraus folgt: Man kann die Wahrscheinlichkeiten von zwei Ereignissen genau dann einfach addieren, wenn sie unvereinbar sind.

Vierfeldertafel:

	$B$	$\bar{B}$	$\Sigma$
$A$	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
$\Sigma$	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Die Zahlen in der rechten Spalte bzw. unteren Zeile ergeben sich jeweils als Summen ( $\Sigma$ ) der Zahlen in den beiden Spalten daneben bzw. den beiden Zeilen darüber.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P_A(B)$  gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $B$  eintritt, wenn vorher schon  $A$  eingetreten ist. In einem Baumdiagramm mit den Ereignissen  $A$  und  $\bar{A}$  auf der ersten Stufe,  $B$  und  $\bar{B}$  auf der zweiten Stufe stehen die bedingten Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen der zweiten Stufe. Es gilt:  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

Zwei Ereignisse  $A, B$  heißen stochastisch unabhängig, wenn  $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$  gilt oder äquivalent dazu:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Insbesondere kann man dann in der Vierfeldertafel in allen vier Feldern die „Randwahrscheinlichkeiten“ einfach multiplizieren.

## Kombinatorik

Das allgemeine Zählprinzip (auch: Produktregel) besagt: Gibt es bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment auf der ersten Stufe  $k_1$  Möglichkeiten, auf der zweiten Stufe  $k_2$  Möglichkeiten, ..., so hat das Zufallsexperiment insgesamt  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots$  Ergebnisse. (Erinnere: Das ist die Mächtigkeit  $|\Omega|$  des Ergebnisraums.)

Formeln zur Kombinatorik: siehe Tabelle