Wichtiges zur Analytischen Geometrie (und LGS)

Determinanten:

Für $2\times2-$ und $3\times3-$Matrizen gilt jeweils: Die Determinante ist die (Summe der) Hauptdiagonale(n), d.h. links oben nach rechts unten minus die (Summe der) Nebendiagonale(n), d. h. links unten nach rechts oben. Bei $3\times3-$Matrizen muss man vorher noch mal die ersten beiden Spalten rechts daneben schreiben:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{cb}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = \mathrm{aei} + \mathrm{bfg} + \mathrm{cdh} - \mathrm{gec} - \mathrm{hfa} - \mathrm{idb}$$

Cramer’sche Regel (Determinantenverfahren):

Die Lösungen eines $2\times2-$LGS ergeben sich für $D\neq0$ folgendermaßen: $x_1 = \frac{D_1}{D}$; $x_2 = \frac{D_2}{D}$

D ist dabei die Determinante der Koeffizientenmatrix, D_1 bzw. D_2 die Determinante der Matrix, die entsteht, wenn man in der Koeffizientenmatrix die erste bzw. zweite Spalte durch die konstanten Zahlen der rechten Seite ersetzt.

Beispiel: Für $2x_1 + 3x_2 = -1$ und $-x_1 + 4x_2 = 2$ ist $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Ähnliches gilt bei $3\times3-$LGS.

Das Verfahren ist i.A. zu umständlich; wichtig ist aber: ein LGS ist genau dann eindeutig bzw. nicht eindeutig lösbar (d.h. keine oder unendlich viele Lösungen), wenn D ungleich bzw. gleich 0 ist.

Lage von Vektoren zueinander:

- Zwei Vektoren (bzw. ihre Repräsentanten) sind parallel (kollinear), wenn sie Vielfache voneinander sind (alternativ: wenn ihr Vektorprodukt gleich $\vec{0}$ ist).
- Zwei Vektoren bzw. ihre Repräsentanten) sind senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist (siehe Formelsammlung!).
- Einen Vektor, der zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht ist, erhält man aus dem Vektorprodukt der beiden Vektoren (siehe Formelsammlung!).
- Drei Vektoren (bzw. ihre Repräsentanten) liegen in derselben Ebene (sind komplanar), wenn ihr Spatprodukt gleich 0 ist; äquivalent: wenn die Determinante der $3\times3-$Matrix aus den drei Vektoren gleich 0 ist.

Vektor-/Kreuz- und Spatprodukt:

- Der Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich $|\vec{a}\times\vec{b}|$. (sind die Vektoren zweidimensional, so ist dies gleich der Determinante der $2\times2-$Matrix aus den beiden Vektoren)
- Das Volumen eines von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats ist gleich $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}\right|$. Dies ist gleich der Determinante der $3\times3-$Matrix aus den drei Vektoren.
- Das Volumen einer von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten vierseitigen Pyramide ist gleich $\frac{1}{3}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}\right| = \frac{1}{3}\left|\det\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\right|$.

- Vorsicht: sind die Eckpunkte A, B, C, ... gegeben, so sind $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$, ... ***nicht*** gleich der Ortsvektoren dieser Punkte, sondern es gilt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ usw.!

<u>Geradengleichung aufstellen:</u> siehe Formelsammlung!
aus Punkteschar: Ortsvektor hinschreiben, aufteilen in konstanten Vektor plus Parameter mal konstanten Vektor

<u>Ebenengleichungen aufstellen:</u>

- Parameterform: siehe Formelsammlung!
- Normalenform:
  - Normalenvektor $\vec{n}$ als Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnen (diese erhält man aus den Punkten z. B. als $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a}$)
  - in Formel aus Formelsammlung einsetzen
- Koordinatenform:
  - entweder erst die Normalenform aufstellen (s.o.), dann die Klammer auflösen
  - oder $\vec{n}$ berechnen, dann die Gleichung in der Form $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$ hinschreiben, dann einen Punkt einsetzen und damit c berechnen

  Beachte: Die Koeffizienten a, b, c (siehe Formelsammlung) sind die Koordinaten des Normalenvektors!

<u>Geradenscharen:</u> In Prüfungen kommen eigentlich nur zwei Fälle vor:

- Geradenbüschel: alle Geraden gehen durch denselben Punkt; erkennt man i. A. daran, dass nur der Richtungsvektor von einem Parameter abhängt, nicht aber der Aufpunkt (dieser ist dann der Büschelpunkt); um die Ebene zu finden, in der alle Geraden liegen, nimmt man als Aufpunkt den Büschelpunkt und teilt den Richtungsvektor in zwei Vektoren auf (ein Parameter der Ebene ist also dann der Scharparameter der Geradenschar)
- Parallelenschar: alle Geraden sind parallel zueinander; erkennt man i. A. daran, dass nur der Aufpunkt von einem Parameter abhängt, nicht aber der Richtungsvektor; die Aufpunkte liegen i. A. auf einer sogenannten Trägergeraden, deren Gleichung man findet, indem man die Aufpunktschar in eine Geradengleichung umschreibt; um die Ebene zu finden, in der alle Geraden liegen, nimmt man als Aufpunkt den Aufpunkt einer Geraden der Schar zu einem beliebig selbst gewähltem Parameterwert, als Richtungsvektoren erstens den Richtungsvektor der Schar und zweitens den Richtungsvektor der Trägergeraden

<u>Lagebeziehungen:</u>

- Gerade zu Gerade: zunächst überprüfen, ob die Richtungsvektoren parallel sind (Vielfache voneinander); wenn ja: überprüfen, ob der Aufpunkt der einen auf der anderen Gerade liegt (ja: identisch; nein: echt parallel); wenn nein: überprüfen, ob die beiden Richtungsvektoren und der Vektor von einem Aufpunkt zum anderen komplanar sind (z. B. mit Spatprodukt/Determinante; wenn ja: Schnitt; nein: windschief) – oder einfach versuchen, den Schnittpunkt auszurechnen!
- Ebene zu Ebene (beide in Koordinatenform): zunächst überprüfen, ob die Normalenvektoren parallel sind (Vielfache voneinander); wenn ja: überprüfen, ob die Gleichungen Vielfache voneinander sind (ja: identisch; nein: echt parallel); wenn nein: Schnitt (senkrechter Schnitt, wenn Normalenvektoren senkrecht zueinander)
- Gerade zu Ebene (in Koordinatenform): zunächst überprüfen, ob der Richtungsvektor senkrecht zum Normalenvektor steht (Skalarprodukt = 0); wenn ja: überprüfen, ob der Aufpunkt der Geraden in der Ebene liegt (ja: Gerade in Ebene; nein: echt parallel); wenn nein: Schnitt (senkrechter Schnitt, wenn Richtungsvektor und Normalenvektor parallel)
- Gerade zu Koordinatensystem:
  - Ursprungsgerade, wenn Ursprung in Gerade liegt (Ortsvektor des Aufpunkts ist dann ein Vielfaches des Richtungsvektors)

- überprüfen, ob Richtungsvektor parallel zu $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist (geht nur, wenn zwei der Komponenten gleich 0 sind); wenn ja: parallel zu entsprechender Koordinatenachse; wenn zusätzlich Ursprungsgerade: identisch zu Koordinatenachse
- überprüfen, ob Richtungsvektor senkrecht zu $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist (geht nur, wenn eine der Komponenten gleich 0 ist); wenn ja: parallel zu entsprechender Koordinatenebene; wenn zusätzlich Ursprungsgerade: liegt in Koordinatenebene (sieht man auch schneller: wenn eine Koordinate *aller* Punkte auf der Geraden immer gleich 0 ist, dann liegt die Gerade in einer Koordinatenebene)

- Ebene zu Koordinatensystem:
  - Ursprungsebene, wenn Ursprung in Ebene liegt (Konstante in Ebenengleichung (in Koordinatenform) ist dann gleich 0)
  - überprüfen, ob Normalenvektor parallel zu $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist (geht nur, wenn zwei der Komponenten gleich 0 sind); wenn ja: parallel zu entsprechender Koordinatenebene; wenn zusätzlich Ursprungsebene: identisch zu Koordinatenebene
  - überprüfen, ob Normalenvektor senkrecht zu $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist (geht nur, wenn eine der Komponenten gleich 0 ist); wenn ja: parallel zu entsprechender Koordinatenachse; wenn zusätzlich Ursprungsebene: Koordinatenachse liegt in Ebene

<u>Schnitt:</u>

- Gerade mit Gerade:
  - (rechte Seiten der) Gleichungen gleichsetzen, daraus LGS für die beiden Parameter aufstellen und lösen, einen der Parameter in die entsprechende Geradengleichung einsetzen
  - Schnittwinkel: in die Formel für den Winkel zwischen Vektoren (siehe Formelsammlung) die Richtungsvektoren einsetzen, außerdem Betrag außen rum (das sorgt dafür, dass der Winkel zwischen 0° und 90° liegt), also: $\cos\varphi = \left|\frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right|$.
- Ebene mit Ebene (beide in Koordinatenform):
  - das unterbestimmte (2x3)-LGS lösen; eine der Variablen ist frei wählbar, wähle diese als Parameter λ und berechne damit die anderen beiden Koordinaten; die drei Gleichungen für x_1, x_2, x_3 kann man dann als eine Geradengleichung schreiben
  - Schnittwinkel: in die Formel für den Winkel zwischen Vektoren (siehe Formelsammlung) die Normalenvektoren einsetzen, außerdem Betrag außen rum (das sorgt dafür, dass der Winkel zwischen 0° und 90° liegt), also: $\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1\circ\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right|$.
- Schnittgerade von Ebenenscharen: unterscheide
  - Gerade ermitteln, in der sich alle Ebenen schneiden (d. h. es ist schon vorgegeben, dass sich alle in derselben Gerade schneiden!): zwei Ebenen der Schar zu selbst gewählten Parameterwerten (besonders einfache wählen!) miteinander schneiden
  - zeigen, dass sich alle Ebenen der Schar in einer Gerade schneiden:

        - zwei allgemeine Ebenen (Parameter a_1 und a_2) miteinander schneiden und dann zeigen, dass die Schnittgerade nicht mehr von a_1 und a_2 abhängt
        - oder: eine allgemeine Ebene (Parameter a) und eine zu einem selbst gewählten Parameterwert miteinander schneiden
        - oder: zwei Ebenen der Schar zu selbst gewählten Parameterwerten miteinander schneiden und danach noch zeigen, dass die sich ergebende Schnittgerade in allen Ebenen der Schar liegt
- Gerade mit Ebene (in Koordinatenform):
    - Geradengleichung (bzw. die drei Gleichungen für x_1, x_2, x_3) in die Ebenengleichung einsetzen, Gleichung für den Parameter lösen, Parameter in die Geradengleichung einsetzen
    - Schnittwinkel: $\sin\varphi = \left|\frac{\vec{u}\circ\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}\right|$ (hier sin nötig statt cos, da der Normalenvektor ja senkrecht auf der Ebene steht)
- Gerade mit Koordinatensystem: Gerade mit den Koordinatenebenen schneiden, d. h. nacheinander jeweils $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ setzen, den entsprechenden Wert des Parameters ausrechnen und damit dann jeweils die anderen beiden Koordinaten
- Ebene mit Koordinatensystem:
    - Ebene mit den Koordinatenachsen schneiden, d. h. nacheinander jeweils $x_1 = x_2 = 0$ bzw. $x_1 = x_3 = 0$ bzw. $x_2 = x_3 = 0$ setzen und die jeweils fehlende Koordinaten ausrechnen ➔ Spurpunkte (alternativ: Achsenabschnittsform verwenden, vgl. Formelsammlung)
    - aus den Spurpunkten (und evtl. Parallelität zu Koordinatenachsen / -ebenen) kann man die Spurgeraden erhalten
    - alternativ: Ebenen mit den Koordinatenebenen schneiden (nacheinander jeweils $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ setzen ➔ jeweils eine Gleichung mit zwei Variablen ➔ eine Variable frei wählbar, gleich Parameter setzen, Geradengleichung aufstellen) ➔ Spurgeraden
- geometrische Interpretation von LGS: jede lineare Gleichung mit 2 Variablen beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$; das Lösen eines (nx2)-LGS entspricht also dem Suchen des Schnittpunkts von n Geraden; jede lineare Gleichung mit (bis zu) 3 Variablen beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$; das Lösen eines (nx3)-LGS entspricht also dem Suchen des Schnittpunkts von n Ebenen
- Schnitt von 3 Ebenen (also Lösen eines (3x3)-LGS) : 8 Möglichkeiten, siehe entsprechendes Blatt

<u>Lote:</u>

- Lotgerade von Punkt auf Ebene: Punkt als Aufpunkt, Normalenvektor als Richtungsvektor; den Lotfußpunkt P_L erhält man als Schnittpunkt der Lotgerade mit der Ebene
- Lotebene durch Punkt zu Gerade: Punkt als Aufpunkt, Richtungsvektor als Normalenvektor
- Lotgerade von Punkt P auf Gerade: allgemeinen Punkt P_λ auf der Geraden hinschreiben; Vektor $\overrightarrow{PP_\lambda}$ berechnen; λ so berechnen, dass dieser Vektor senkrecht zum Richtungsvektor der Gerade ist; die Lotgerade geht dann durch den Punkt P und den entsprechenden Punkt P_λ (= Lotfußpunkt P_L)
- Lotgerade zu zwei windschiefen Geraden: allgemeine Punkte P_λ bzw. Q_μ auf den Geraden hinschreiben; Vektor $\overrightarrow{P_\lambda Q_\mu}$ berechnen; λ und μ so berechnen, dass dieser Vektor senkrecht zu den Richtungsvektoren der Geraden ist (jeweils Skalarprodukt gleich 0; (2x2)-LGS lösen!); die Lotgerade geht dann durch die beiden Punkte P_λ bzw. Q_μ zu den entsprechenden berechneten Werten

<u>Abstände:</u>

- Punkt P zu Ebene E: Lotgerade aufstellen, mit Ebene schneiden; $d(E;P) = \left|\overrightarrow{PL}\right|$ (oder Hessesche Normalenform verwenden, s. Formelsammlung)
- Gerade g zu Ebene E (g||E): beliebigen Punkt P auf g wählen (z. B. Aufpunkt); d(E;g) = d(E;P)

- Ebene F zu Ebene E (F||E): beliebigen Punkt P auf E wählen; d(E;F) = d(E;P)
- Punkt P zu Gerade g:
  - Lotgerade oder Lotebene aufstellen, Lotfußpunkt P_L ermitteln; d(g;P) = $\left|\overrightarrow{PP_L}\right|$
  - oder allgemeinen Punkt P_λ auf der Geraden aufstellen; Vektor von P_λ zum Punkt P aufstellen; Betrag dieses Vektors berechnen, quadrieren ➔ quadratische Funktion von λ; Minimum dieser Funktion suchen (mit Scheitelform oder Differenzialrechnung); entsprechenden Wert von λ wieder einsetzen (Lotfußpunkt $P_L = P_\lambda$)
  - oder allgemeinen Punkt P_λ auf der Geraden aufstellen; Vektor von P_λ zum Punkt P aufstellen; dieser Vektor muss senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden stehen (Skalarprodukt = 0); aus dieser Bedingung ergibt sich λ (Anmerkung: das ist im Prinzip genau dieselbe Rechnung wie mit einer Lotebene!)
  - oder Formel verwenden: d(g;P) = $\left|\vec{u}_0 \times \overrightarrow{AP}\right|$, wobei A der Aufpunkt von g und $\vec{u}_0$ ein Einheits-Richtungsvektor von g ist
- Gerade h zu Gerade g (g||h) : beliebigen Punkt P auf h wählen (z. B. Aufpunkt); d(g;h) = d(g;P) (oder umgedreht)
- windschiefe Geraden: Punkte P_λ bzw. Q_μ ermitteln (s. o.); d(g;h) = $\left|\overrightarrow{P_\lambda Q_\mu}\right|$

<u>Projizieren auf Ebene und Spiegeln an Ebene:</u>
- Punkt P: Lotgerade aufstellen, mit Ebene schneiden ➔ projizierter Punkt $\overline{P}$ = Lotfußpunkt P_L; zugehörigen Parameterwert verdoppeln ➔ Spiegelpunkt P'
- Gleichung der Spiegelebene zu vorgegebenen Punkten P und P': Aufpunkt ist Mittelpunkt der Strecke [PP'] (Mittelwerte der Koordinaten nehmen!), Richtungsvektor ist (Vielfaches von) $\overrightarrow{PP'}$
- Gerade g:
  - g schneidet Ebene nicht senkrecht: Schnittpunkt S bestimmen; beliebigen Punkt P von g (z. B. Aufpunkt; darf nicht in E liegen!) auf Ebene projizieren bzw. an Ebene spiegeln; projizierte Gerade geht durch $\overline{P}$ und S, gespiegelte Gerade geht durch P' und S
  - g || Ebene: Aufpunkt A auf Ebene projizieren bzw. an Ebene spiegeln; projizierte Gerade geht durch $\overline{A}$, gespiegelte Gerade geht durch A'; Richtungsvektoren alle gleich
  - g ist senkrecht zur Ebene: gespiegelte Gerade ist wieder g, Projektion ist Schnittpunkt
  - g liegt in Ebene: gespiegelte und projizierte Gerade sind beide wieder g
- Ebene E: *(sollte nicht vorkommen!)*
  - E schneidet Ebene nicht senkrecht: Schnittgerade s bestimmen; beliebigen Punkt P der Ebene, der nicht zu s gehört, an Ebene spiegeln; gespiegelte Ebene enthält s und geht durch P'; projizierte Ebene ist gleich der Ebene, auf die projiziert wird
  - E || Ebene: beliebigen Punkt P an Ebene spiegeln; gespiegelte Ebene geht durch P' und hat selben Normalenvektor; projizierte Ebene ist gleich der Ebene, auf die projiziert wird
  - E senkrecht zur Ebene: Schnittgerade s bestimmen; gespiegelte Ebene ist gleich E, Projektion ist gleich s

<u>Spiegeln an Gerade:</u> *(sollte nicht vorkommen!)*
im Prinzip entsprechend, nur eben immer für's spiegeln von Punkten die entsprechende Lotgerade (oder Lotebene, geht beides) zur Geraden benutzen

<u>Spiegeln an Punkt Z:</u> *(sollte nicht vorkommen!)* $\overrightarrow{ZP'} = -\overrightarrow{ZP}$ bzw. $\overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$ verwenden

Lineare Unabhängigkeit:
Wenn man n Vektoren mit jeweils n Komponenten hat, gilt: Die Vektoren sind genau dann linear ***un***abhängig, wenn die Determinante der Matrix, die aus den Vektoren gebildet wird, ***un***gleich 0 ist. Beachte: wenn die Anzahl der Vektoren ungleich der Anzahl der Komponenten ist, dann ist die Matrix nicht quadratisch, und man kann keine Determinante berechnen; in diesem Fall muss man auf die allgemeine Definition der linearen Unabhängigkeit zurück greifen (siehe Formelsammlung).
Spezialfälle:

- Für zwei Vektoren bedeutet „linear abhängig" dasselbe wie kollinear (also parallel; Vielfache!).
- Für drei Vektoren bedeutet „linear abhängig" dasselbe wie komplanar (also Spatprodukt = 0).

Basis und Dimension:

- Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, d. h. eine Menge von linear unabhängigen Vektoren, die den ganzen Vektorraum aufspannt, d. h. man kann jeden Vektor eindeutig als Linearkombination von ihnen darstellen. Die Anzahl der Basisvektoren ist für jeden gegebenen Vektorraum jeweils gleich und heißt die Dimension des Vektorraums.
- Eine gegebene Menge von Vektoren bildet eine Basis des $\mathbb{R}^n$, wenn es genau n linear unabhängige Vektoren sind (überprüfen z. B. mit Determinante).
- Um einen Vektor $\vec{b}$ bezüglich einer Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ darzustellen / seine Komponenten bezüglich dieser Basis zu ermitteln, muss man ihn als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:
$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$$
Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungen λ_1, λ_2, ..., λ_n die gesuchten Komponenten sind.

Produkt von Matrix und Vektor:
Eine (nxm)-Matrix multipliziert man mit einem Vektor mit m Komponenten, indem man jeweils Skalarprodukte von allen Zeilen der Matrix mit dem Vektor bildet; Beispiel für (3x3)-Matrizen und Vektoren mit drei Komponenten (s. Formelsammlung für (2x2)-Matrizen und Vektoren mit zwei Komponenten):
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y+3z \\ -x-3y+2z \\ 2y+z \end{pmatrix}$$
Damit kann man dann z. B. das LGS
$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 2 \\ -x - 3y + 2z &= 5 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned}$$
auch folgendermaßen schreiben :
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
bzw. kurz als
$$\mathrm{A} \cdot \vec{x} = \vec{c}\,.$$
aus der Elementargeometrie:

- Ein regelmäßiges Sechseck kann immer in sechs gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. Deshalb ist der Abstand der Eckpunkte zum Mittelpunkt (also der Umkreisradius) immer gleich der Seitenlänge a, und für den Flächeninhalt folgt: $A = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} a^2$.
- Bei einem Kegel ist m (die „Mantellinie") der Abstand der Spitze zur Kreislinie der Grundfläche. Mit dem Satz des Pythagoras folgt: $m = \sqrt{r^2 + h^2}$. Für die Oberfläche gilt: $O = M + G = \pi r m + \pi r^2 = \pi r \cdot (m+r)$.