Wichtiges zur Analytischen Geometrie

<u>Geradenscharen:</u> *In Prüfungen kommen eigentlich nur zwei Fälle vor:*

- *Geradenbüschel: alle Geraden gehen durch denselben Punkt; erkennt man i. A. daran, dass nur der Richtungsvektor von einem Parameter abhängt, nicht aber der Aufpunkt (dieser ist dann der Büschelpunkt); um die Ebene zu finden, in der alle Geraden liegen, nimmt man als Aufpunkt den Büschelpunkt und teilt den Richtungsvektor in zwei Vektoren auf (ein Parameter der Ebene ist also dann der Scharparameter der Geradenschar)*
- *Parallelenschar: alle Geraden sind parallel zueinander; erkennt man i. A. daran, dass nur der Aufpunkt von einem Parameter abhängt, nicht aber der Richtungsvektor; die Aufpunkte liegen i. A. auf einer sogenannten Trägergeraden, deren Gleichung man findet, indem man die Aufpunktschar in eine Geradengleichung umschreibt; um die Ebene zu finden, in der alle Geraden liegen, nimmt man als Aufpunkt den Aufpunkt einer Geraden der Schar zu einem beliebig selbst gewähltem Parameterwert, als Richtungsvektoren erstens den Richtungsvektor der Schar und zweitens den Richtungsvektor der Trägergeraden*

<u>Lagebeziehungen:</u>

- siehe entsprechendes Zusammenfassungs-Blatt!
- Gerade zu Koordinatensystem:
  - Ursprungsgerade, wenn Ursprung in Gerade liegt (Ortsvektor des Aufpunkts ist dann ein Vielfaches des Richtungsvektors)
  - überprüfen, ob Richtungsvektor parallel zu $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist (geht nur, wenn zwei der Komponenten gleich 0 sind); wenn ja: parallel zu entsprechender Koordinatenachse; wenn zusätzlich Ursprungsgerade: identisch zu Koordinatenachse
  - überprüfen, ob Richtungsvektor parallel zu einer der Koordinatenebenen ist (geht nur, wenn eine der Komponenten gleich 0 ist); wenn zusätzlich Ursprungsgerade: liegt in Koordinatenebene
  - Faustregel: immer parallel zu dem, was im Richtungsvektor nicht null ist!
- Ebene zu Koordinatensystem:
  - Ursprungsebene, wenn Ursprung in Ebene liegt (Konstante in Ebenengleichung (in Koordinatenform) ist dann gleich 0)
  - wenn in Koordinatengleichung zwei Koordinaten nicht vorkommen: parallel zu entsprechender Koordinatenebene; wenn zusätzlich Ursprungsebene: identisch zu Koordinatenebene
  - wenn in Koordinatengleichung eine Koordinate nicht vorkommt: parallel zu entsprechender Koordinatenachse; wenn zusätzlich Ursprungsebene: Koordinatenachse liegt in Ebene
  - Faustregel: immer parallel zu dem, was in der Koordinatengleichung nicht vorkommt!

<u>Schnitt:</u>

- siehe entsprechendes Zusammenfassungs-Blatt
- Schnittgerade von Ebenenscharen: unterscheide
  - Gerade ermitteln, in der sich alle Ebenen schneiden (d. h. es ist schon vorgegeben, dass sich alle in derselben Gerade schneiden!): zwei Ebenen der Schar zu selbst gewählten Parameterwerten (besonders einfache wählen!) miteinander schneiden
  - zeigen, dass sich alle Ebenen der Schar in einer Gerade schneiden: zwei allgemeine Ebenen (Parameter a_1 und a_2) miteinander schneiden und dann zeigen, dass die Schnittgerade nicht mehr von a_1 und a_2 abhängt

- Gerade mit Koordinatensystem: Gerade mit den Koordinatenebenen schneiden, d. h. nacheinander jeweils $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ setzen, den entsprechenden Wert des Parameters ausrechnen und damit dann jeweils die anderen beiden Koordinaten
- Ebene mit Koordinatensystem: Ebene mit den Koordinatenachsen schneiden, d. h. nacheinander jeweils $x_1 = x_2 = 0$ bzw. $x_1 = x_3 = 0$ bzw. $x_2 = x_3 = 0$ setzen und die jeweils fehlende Koordinaten ausrechnen ➔ Spurpunkte; oder deutlich schneller: Achsenabschnittsform verwenden! aus den Spurpunkten (und evtl. Parallelität zu Koordinatenachsen / -ebenen) kann man die Spurgeraden erhalten; alternativ: Ebenen mit den Koordinatenebenen schneiden (nacheinander jeweils $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$ setzen ➔ jeweils eine Gleichung mit zwei Variablen ➔ eine Variable frei wählbar, gleich Parameter setzen, Geradengleichung aufstellen) ➔ Spurgeraden
- geometrische Interpretation von LGS: jede lineare Gleichung mit 2 Variablen beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$; das Lösen eines (nx2)-LGS entspricht also dem Suchen des Schnittpunkts von n Geraden; jede lineare Gleichung mit (bis zu) 3 Variablen beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$; das Lösen eines (nx3)-LGS entspricht also dem Suchen des Schnittpunkts von n Ebenen
- Schnitt von 3 Ebenen (also Lösen eines (3x3)-LGS) : 8 Möglichkeiten, siehe entsprechendes Blatt

Lineare Unabhängigkeit:

Wenn man n Vektoren mit jeweils n Komponenten hat, gilt: Die Vektoren sind genau dann linear ***un***abhängig, wenn die Determinante der Matrix, die aus den Vektoren gebildet wird, ***un***gleich 0 ist. Beachte: wenn die Anzahl der Vektoren ungleich der Anzahl der Komponenten ist, dann ist die Matrix nicht quadratisch, und man kann keine Determinante berechnen; in diesem Fall muss man auf die allgemeine Definition der linearen Unabhängigkeit zurück greifen (siehe Formelsammlung).
Spezialfälle:

- Für zwei Vektoren bedeutet „linear abhängig“ dasselbe wie kollinear (also parallel; Vielfache!).
- Für drei Vektoren bedeutet „linear abhängig“ dasselbe wie komplanar (also Determinante = 0).

Basis und Dimension:

- Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, d. h. eine Menge von linear unabhängigen Vektoren, die den ganzen Vektorraum aufspannt, d. h. man kann jeden Vektor eindeutig als Linearkombination von ihnen darstellen. Die Anzahl der Basisvektoren ist für jeden gegebenen Vektorraum jeweils gleich und heißt die Dimension des Vektorraums.
- Eine gegebene Menge von Vektoren bildet eine Basis des $\mathbb{R}^n$, wenn es genau n linear unabhängige Vektoren sind (überprüfen z. B. mit Determinante).
- Um einen Vektor $\vec{b}$ bezüglich einer Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ darzustellen / seine Komponenten bezüglich dieser Basis zu ermitteln, muss man ihn als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:
$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$$
Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungen λ_1, λ_2, ..., λ_n die gesuchten Komponenten sind.