Wichtiges zur Analysis

Definitionsmenge: hier ist zu beachten:

- das Argument eines Logarithmus muss positiv sein (*siehe dazu auch „Ungleichungen lösen"!)*
- Der Nenner eines Bruchs darf nicht gleich 0 sein.

grundlegende Grenzwerte:

- gebrochenrationale Funktionen für $x \to \pm\infty$ (vgl. Blatt „Asymptoten bei gebrochenrationalen Funktionen"):
  - o Zählergrad < Nennergrad: Grenzwert 0
  - o Zählergrad = Nennergrad: Grenzwert $\frac{a_n}{b_n}$ (Quotient der Leitkoeffizienten)
  - o Zählergrad > Nennergrad: Funktionsterm mittels Polynomdivision in eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion umschreiben; der Grenzwert der echt gebrochenrationalen Funktion ist dann immer 0
- $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; entsprechend für e^{-x} (kurz, aber mathematisch nicht ganz korrekt: $e^{\infty} = \infty$; $e^{-\infty} = 0$); $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ ($\ln\infty = \infty$; $\ln 0 = -\infty$)
- da e^x und ln x stetig sind, kann man hier erst mal den Grenzwert des Arguments berechnen und daraus den Grenzwert der ganzen Funktion folgern, z. B.: $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{x^2}{x+6}\right) = -\infty$, da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x+6} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$; oder $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+6}\right) = \ln 2$, da $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x+6} = 2$
- $\infty + c = \infty + \infty = \infty$; $c \cdot \infty = \infty$ für c > 0 bzw. $= -\infty$ für c < 0; $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = 0$; $\frac{c}{0} = \infty$ oder $= -\infty$ (i. A. links- und rechtsseitigen Grenzwert unterscheiden!)

Regel von de L'Hospital: ***(lim nicht vergessen!!!)***

- steht für $\frac{\infty}{\infty}$ und für $\frac{0}{0}$ in der Formelsammlung
- ist auch für $0 \cdot \infty$ anwendbar, indem man das Produkt als Quotient schreibt (dabei i. A. $e^{..}$ nach unten, ln nach oben): z. B. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \underset{dH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ oder $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} \underset{dH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$,
- ist oft auch für $\infty - \infty$ anwendbar, wenn man geeignet ausklammert: z. B. $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \ln x)$ $= \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \infty \cdot \left(1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) \underset{dH}{=} \infty \cdot \left(1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}\right) = \infty \cdot (1-0) = \infty$

einige oft vorkommende Grenzwerte, die man so berechnen kann, stehen auch in der Formelsammlung: (jeweils r > 0)

- o $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$, d. h. die Exponentialfunktion geht für $x \to \infty$ schneller gegen ∞ als jede positive Potenz; umgedreht folgt auch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^r} = \infty$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$, d. h. die Logarithmusfunktion geht für $x \to \infty$ langsamer gegen ∞ als jede positive Potenz; umgedreht folgt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{\ln x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0}\left(x^r \cdot \ln x\right) = 0$; das kann man auch schreiben als $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-r}} = 0$, d. h. die Logarithmusfunktion geht für $x \to 0$ langsamer gegen $-\infty$ als jede negative Potenz

<u>Asymptoten und stetig behebbare Definitionslücken:</u> *(siehe auch das entsprechende Blatt)*

- Gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, so hat der Graph die waagrechte Asymptote (mit der Gleichung) $y = c$
- Gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, so kann man überprüfen, ob man f(x) als Summe aus einer linearen Funktion und einer Funktion g schreiben kann (also $f(x) = mx + t + g(x)$), für die $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ gilt; wenn ja, dann hat der Graph die schräge Asymptote (mit der Gleichung) $y = mx + t$
  - Beispiel 1: gebrochenrationale Funktionen mit Zählergrad gleich Nennergrad + 1; nach Polynomdivision ergibt sich eine lineare plus eine echt gebrochenrationale Funktion
  - Beispiel 2: $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ hat schräge Asymptote $y = 2x - 1$, da $e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$
- Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ (wobei x_0 eine Definitionslücke ist!) mit einer beliebigen reellen Zahl c, dann ist x_0 eine stetig behebbare Definitionslücke. Dies kann bei gebrochenrationalen Funktionen nur dann auftreten, wenn x_0 eine Nullstelle von Zähler <u>und</u> Nenner ist; man muss dann versuchen, ob man den zugehörigen Faktor $(x - x_0)$ vollständig herauskürzen kann. (vgl. Blatt „Definitionslücken“ bei den gebrochenrationalen Funktionen)
- Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ (wobei x_0 eine Definitionslücke ist!), dann ist x_0 eine Polstelle. Dies kann bei gebrochenrationalen Funktionen nur dann auftreten, wenn x_0 eine Nullstelle des (vollständig gekürzten!) Nenners, aber keine Nullstelle des (vollständig gekürzten!) Zählers ist.

<u>Bruchgleichungen:</u> löst man, indem man zunächst mit dem Hauptnenner multipliziert und kürzt

<u>Ungleichungen lösen:</u>

- zunächst die Ungleichung so umstellen, dass rechts 0 steht
- dann die zugehörige Gleichung lösen; außerdem Definitionslücken des Terms bestimmen
- mit Hilfe dieser Ergebnisse eine Vorzeichentabelle aufstellen (beachte: das Vorzeichen kann sowohl bei Nullstellen als auch bei Definitionslücken wechseln!) oder den Graph skizzieren
- oft kann man auch ohne Vorzeichentabelle direkt Aussagen über das Vorzeichen von Zähler und Nenner machen (vgl. Blatt „Wie überprüft man den VZW einer Funktion an einer Nullstelle?“)

<u>Integration:</u> *(siehe auch die Blätter „Übung zu den Integrationsregeln“ und „Integrieren von Quotientenfunktionen“)*

- Bei unbestimmten Integralen (keine Zahlen am Integralzeichen) ist das Ergebnis eine beliebige Stammfunktion plus C (!), bei bestimmten Integralen (Zahlen am Integralzeichen) und Integralfunktionen (eine Zahl und eine Variable am Integralzeichen) schreibt man eine beliebige Stammfunktion (plus C nicht nötig) in die eckigen Klammern mit den Grenzen hinten dran und berechnet dann „obere Grenze minus unter Grenze“.
- Flächenstücke über der x-Achse mit +, Flächen unter der x-Achse mit – berechnen (oder einfach den Betrag nehmen); wenn es mehrere Nullstellen gibt, jedes Flächenstück einzeln mit entsprechendem Vorzeichen berechnen
- Bei Flächenstücken zwischen Kurven immer über „obere Funktion minus untere Funktion“ integrieren; dabei erst die Differenz ausrechnen und vereinfachen, dann die Stammfunktion bilden! Wenn es mehrere Schnittstellen gibt, jedes Flächenstück einzeln berechnen und jeweils darauf achten, welcher Graph oben liegt (oder einfach jeweils den Betrag nehmen).

- allgemeine Regel (Formelsammlung!): Ist F(x) eine Stammfunktion zu f(x), dann ist $\frac{1}{a}$F(ax+b) eine Stammfunktion zu f(ax+b); Beispiele:
    - eine Stammfunktion zu cos(ax+b) ist $\frac{1}{a}$sin(ax+b)
    - eine Stammfunktion zu e^{ax+b} ist $\frac{1}{a}e^{ax+b}$
    - eine Stammfunktion zu $(ax+b)^n$ ist $\frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}$ (für n∈ ℝ\{–1})

      bzw. $\frac{1}{a}$ln |ax+b| (für n = –1)
    - eine Stammfunktion zu ln(ax+b) ist $\frac{1}{a}$ ((ax+b) ln(ax+b) – (ax+b))
- gebrochenrationale Funktionen, bei denen der Nenner nur eine Potenzfunktion ist, teilt man auf in eine Summe von Brüchen und integriert jeden einzeln
- bei anderen gebrochenrationale Funktionen, bei denen der Zählergrad größer oder gleich als der Nennergrad ist, ***führt man erst mal eine Polynomdivision durch!!! (das wird STÄNDIG falsch gemacht, also passen Sie hier gefälligst auf!!!)***
- die Regel $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ = ln |f(x)| + C ist oft hilfreich *(evtl. erst geeignete Konstante vor's Integral ziehen!)*; Beispiel: $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$
- Zwei Integrationsregeln, die man meist automatisch benutzt:
    - $\int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx$ „Summenregel“
    - $\int (c \cdot f)dx = c \cdot \int f\,dx$ für alle c∈ ℝ (konstante Faktoren kann man vor das Integral ziehen)
- zwei Regeln, die im Lehrplan stehen, aber in Prüfungen bisher nicht vor kamen:
    - $\int a^x dx = \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a} + C = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
    - $\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + C = x \cdot \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$
- Stellt eine Funktion f die Abhängigkeit einer Größe vom Ort oder von der Zeit dar, so gibt ihre Ableitungsfunktion die lokale bzw. momentane Änderungsrate dieser Größe an; entsprechend ergibt das Integral über die Änderungsrate einer Größe die gesamte Änderung dieser Größe (Beispiel: Das Integral zwischen den Zeiten „1 Tag“ und „4 Tage“ über den Gewichtsverlust pro Tag ergibt den gesamten Gewichtsverlust zwischen dem 1. und dem 4. Tag.)
- Der Mittelwert einer Funktion f in einem Intervall [a;b] ergibt sich mit der Formel

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(Herleitung: A = $\int_a^b f(x)dx$*; Rechteckfläche gleicher Größe: A =* $\bar{f} \cdot (b-a)$*; alternativ:* $\bar{f}$ *= mittlere Änderungsrate von F (da f = F'), also* $\bar{f} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$*)*

Monotonie:

- 1. Ableitung gleich Null setzen (Stellen mit waagrechter Tangente), x-Werte berechnen; wenn die 1. Ableitung ein Bruch ist: auch Nullstellen des Nenners berechnen
- Graph skizzieren oder Vorzeichentabelle machen, um heraus zu bekommen, wo die 1. Ableitung positiv bzw. negativ ist; dabei kann man oft Zeit sparen, wenn man sich erst mal überlegt, welche Faktoren des Terms sowieso immer positiv / immer negativ sind (Beispiel: in $\frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2}$ sind e^x und x^2 für alle x∈ 𝔻 positiv, also muss man nur noch das Vorzeichen von (x – 1) ermitteln (vgl. Blatt „Wie überprüft man den VZW einer Funktion an einer Nullstelle?“)
- Ist f'(x) < 0 bzw. > 0 in einem Intervall]a;b[, so fällt bzw. steigt G_f streng monoton in [a;b]; die Grenzen werden also eingeschlossen! Ausnahme: Grenzen sind Definitionslücken oder $\pm\infty$; diese

immer ausschließen! Außerdem beachten: Ist f ’< 0 bzw. > 0 auf einer Zahlenmenge, die eine Definitionslücke enthält, so muss man diese Menge aufteilen in die beiden Bereiche links und rechts davon! (Beispiel: für $f(x) = x^{-1}$ ist $f'(x) = -x^{-2} < 0$ in ganz $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; daraus folgt aber nicht, dass G_f in ganz $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ streng monoton fällt, sondern nur, dass G_f jeweils in $\mathbb{R}^-$ und $\mathbb{R}^+$ streng monoton fällt!)

<u>Krümmungsverhalten:</u>

- 2. Ableitung gleich Null setzen („Flachstellen“), x-Werte berechnen; wenn die 2. Ableitung ein Bruch ist: auch Nullstellen des Nenners berechnen
- Graph skizzieren oder Vorzeichentabelle machen, um heraus zu bekommen, wo die 2. Ableitung positiv bzw. negativ ist; dabei gilt dasselbe wie bei der Monotonie
- Ist $f''(x) < 0$ bzw. > 0 in einem Intervall $]a;b[$, so ist G_f in $[a;b]$ rechts- bzw. linksgekrümmt; die Grenzen werden also eingeschlossen! Auch hier gilt dasselbe wie bei der Monotonie.

<u>Extremwertprobleme:</u>

Man kann nicht viele allgemeine Tipps geben, aber sinnvoll ist eigentlich immer:

- allgemeine Formeln heraussuchen (für die gesuchte Größe, z. B. Flächeninhalt, und für Nebenbedingungen, z. B. Umfang)
- möglichst viele Angaben aus der Aufgabe in diese Formeln einsetzen (sowohl in die Formel für die gesuchte Größe als auch in die Nebenbedingungen)
- aus den Nebenbedingungen die noch fehlenden Variablen in der Formel für die gesuchte Größe ermitteln – dann sollte man eigentlich (evtl. nach einigen Umformungen) die gesuchte Funktion heraus bekommen
- ein (oder zwei) Ableitungen bilden
- relative Extremstellen suchen:
  - erste Ableitung gleich 0, Variable berechnen
  - in zweite Ableitung einsetzen (siehe Formelsammlung) bzw. VZW der ersten Ableitung (meist einfacher, da oft die 2. Ableitung sehr mühsam zu berechnen wäre! Den VZW bekommt man z. B. aus der Monotonie (s.o.) oder durch Einsetzen von Werten „direkt links“ oder „direkt rechts“ der Stelle mit waagrechter Tangente.)
  - Wert der gesuchten Größe dafür berechnen
- absolute Extremstelle suchen (Randwerte nicht vergessen!!!)

<u>Wendestellen:</u>

- Außer dem VZW der zweiten Ableitung (siehe Formelsammlung) kann man als hinreichendes Kriterium auch $f'''(x_0) \neq 0$ benutzen; ist aber meistens nicht empfehlenswert, weil die 3. Ableitung nur sehr mühsam zu berechnen wäre. Den VZW der zweiten Ableitung bekommt man z. B. aus der Vielfachheit der Nullstellen der 2. Ableitung (ungerade: VZW; gerade: kein VZW) oder aus dem Krümmungsverhalten (s.o.) oder durch Einsetzen von Werten „direkt links“ oder „direkt rechts“ der Flachstellen. (vgl. Blatt „Wie überprüft man den VZW einer Funktion an einer Nullstelle?“)
- Wendestellen von f sind immer Extremstellen von f ’, also Stellen, an denen die Steigung von f maximal oder minimal ist, also Stellen mit größter/kleinster Steigung (Zunahme) bzw. größtem/kleinstem Gefälle (Abnahme). Was es genau ist, bekommt man aus dem VZW von f ’’.

<u>Newton-Verfahren:</u>

Die allgemeine Formel steht in der Formelsammlung; vor deren Anwendung aber nicht vergessen, die Gleichung in die Form $f(x) = 0$ umzuschreiben! Beispiel: $x^3 - x = 1$ kann man nicht direkt mit dem Newton-Verfahren lösen; erst umschreiben in $x^3 - x - 1 = 0$ und dann das Newton-Verfahren mit $f(x) = x^3 - x - 1$ anwenden.

<u>Steigung(swinkel) / parallel / senkrecht / Tangente / Normale:</u>

- Zwischen der Steigung m, der Ableitung $f'(x_0)$ und dem Steigungswinkel α an einer Stelle x_0 besteht der Zusammenhang $m = f'(x_0) = \tan\alpha$.

- Zwei Geraden sind parallel zueinander, wenn ihre Steigungen gleich sind ➔ zwei Funktionsgraphen sind an einer Stelle parallel zueinander, wenn ihre Ableitungen dort gleich sind.
- Zwei Geraden sind senkrecht zueinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen gleich –1 ist ➔ zwei Funktionsgraphen sind an einer Stelle senkrecht zueinander, wenn das Produkt ihrer Ableitungen dort gleich –1 ist.
- Die Gleichung der Tangente an einer Stelle x_0 steht in der Formelsammlung.
- Da eine Normale senkrecht zur Tangente steht, ist das Produkt aus der Steigung der Tangenten und der Steigung der Normalen gleich –1; die Gleichung der Normalen erhält man also, wenn man in der Gleichung der Tangenten $f'(x_0)$ durch $.-\frac{1}{f'(x_0)}$ ersetzt.

<u>allgemeine Sinusfunktion:</u> f(x) = a sin(bx + c)

- das Folgende gilt für b > 0; ist b < 0, so muss man zunächst die Symmetrie ausnutzen, z. B.:
  $$3\sin(-2x+1) = 3\sin(-(2x-1)) = -3\sin(2x-1)$$
- |a| gibt die Amplitude an, die Wertemenge ist also [–|a|;|a|]; ist a < 0, so ist der Graph an der x-Achse gespiegelt; die Periodenlänge ist $\frac{2\pi}{b}$; die Verschiebung in x-Richtung ist $-\frac{c}{b}$
- eine Nullstelle ist deswegen immer $-\frac{c}{b}$, die unendlich vielen anderen erhält man durch Addition von k mal halbe (!) Periode, also $x_k = -\frac{c}{b} + k \cdot \frac{\pi}{b}$ mit $k \in \mathbb{Z}$; dies sind auch die Wendestellen
- eine Maximalstelle befindet sich immer eine viertel (!) Periodenlänge vor bzw. hinter der ersten Nullstelle (je nachdem, ob a größer oder kleiner als 0 ist); die unendlich vielen anderen Maximalstellen erhält man durch Addition von k mal ganzer (!) Periodenlänge, der Wert der Maxima ist jeweils |a|; entsprechend ist der Wert der Minima jeweils –|a|
- Vorsicht: wenn die Funktion die Form f(x) = a sin(bx + c) + d mit $d \neq 0$ hat, gilt folgendes: die Wendestellen und Maximal- und Minimalstellen ändern sich nicht (aber deren y-Werte!), die Nullstellen ändern sich aber (nicht mehr identisch mit Wendestellen!); alle Punkte werden um d nach oben verschoben

<u>Goniometrische Gleichungen:</u> *(siehe auch das entsprechende Blatt)*

- Eine Gleichung der Form sin(x) = c oder cos(x) = c oder tan(x) = c hat i. A. unendlich viele Lösungen; eine Lösung x_1 findet man mit Hilfe des Taschenrechners, die anderen mittels der Symmetrie ($x_2 = \pi - x_1$ bei sin; $x_2 = -x_1$ bei cos) und der Periodizität (zu einer Lösung gehören immer unendlich viele andere im Abstand $k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$).
- Gleichungen der Form a sin(bx + c) = d (und entsprechend für cos oder tan) löst man z. B., indem man zunächst durch a teilt, dann u = bx + c substitutiert, die u-Werte wie oben berechnet und am Schluss die Rücksubstitution nicht vergisst.
- Gleichungen, in denen nur sin und cos (mit demselben Argument!) auftreten, löst man, indem man sin auf die linke, cos auf die rechte Seite bringt, dann durch cos teilt und tan = $\frac{\sin}{\cos}$ ausnutzt.
- Gleichungen, in denen neben sin und cos noch konstante Summanden auftreten (z. B. 2 sin x = 3 cos x – 1), löst man, indem man zunächst sin (oder cos) mit Hilfe des „trigonometrischen Pythagoras" $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ durch cos (oder sin) ausdrückt (Wurzel!), dann die Wurzel isoliert und die Gleichung quadriert (am Schluss Probe!); weiter wie folgt:
- Gleichungen, in denen $\sin^2$, sin und ein konstanter Summand auftritt (z. B. $\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$) löst man, indem man u = sin x substitutiert, die Gleichung für u löst und am Schluss die Rücksubstitution nicht vergisst; ebenso bei cos.
- Gleichungen, in denen $\sin^2$ und cos (oder $\cos^2$ und sin) auftritt, löst man, indem man mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2$ durch $\cos^2$ ausdrückt (oder umgedreht); dann weiter wie eben; manchmal kann auch das Additionstheorem $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ hilfreich sein.

- In Gleichungen, in den cos und sin mit verschiedenen Argumenten auftreten (z. B. sin(2x) = cos(x)), oder in denen ein Produkt von sin und cos steht, sollte man versuchen, die Additionstheoreme sin(2x) = 2 sin x cos x oder $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ zu verwenden.

<u>Stetigkeit und Differenzierbarkeit:</u>

- Nach Definition ist eine Funktion stetig an einer Stelle x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Zu überprüfen ist aber eigentlich immer die Stetigkeit an „Nahtstellen“ von abschnittsweise definierten Funktionen. Da die Funktion aber links und rechts der „Nahtstelle“ unterschiedliche Funktionsterme hat, braucht man dort zwei Grenzwerte – eben den links- und den rechtsseitigen. Diese beiden muss man also berechnen, dazu den Funktionswert; nur wenn alle drei Werte gleich sind, ist die Funktion stetig bei x_0.
- Nach Definition ist eine Funktion differenzierbar an einer Stelle x_0, wenn dort der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert. Dies ist aber meist recht kompliziert zu überprüfen. Alternativ macht man statt dessen normalerweise folgendes:
  - Erst mal prüfen, ob die Funktion dort stetig ist (s.o.); wenn nicht, dann ist sie dort auch nicht differenzierbar.
  - Dann die Ableitung der (abschnittsweise definierten) Funktion berechnen. Dabei aber ***Vorsicht:*** ob es an der Stelle x_0 selbst eine Ableitung gibt oder nicht, weiß man noch nicht – das will man ja erst heraus finden! Deswegen schreibt man bei der Ableitung der abschnittsweise definierten Funktion ***nicht*** mehr „$x \leq x_0$“ bzw. „$x \geq x_0$“, sondern nur noch „$x < x_0$“ bzw. „$x > x_0$“!
  - Von der Ableitung berechnet man dann wiederum den links- und den rechtsseitigen Grenzwert (den Funktionswert kann man hier nicht berechnen, weil’s ja hier gerade darum geht, ob es diesen Wert überhaupt gibt!). Sind beide Werte gleich (und ist die Funktion außerdem stetig bei x_0, s. o.), so ist sie differenzierbar bei x_0.

  (Anmerkung: wenn diese beiden Grenzwerte nicht existieren, kann die Funktion trotzdem an dieser Stelle differenzierbar sein (siehe Beispiel in Wikipedia!) – das sollte an der Schule aber eigentlich nie vorkommen...)