Wichtiges zur Analysis

Definitionsmenge: hier ist zu beachten:

- das Argument eines Logarithmus muss positiv sein (*hier muss man also oft erst mal eine Ungleichung lösen, siehe weiter unten!)*
- Der Nenner eines Bruchs darf nicht gleich 0 sein.

grundlegende Grenzwerte:

- gebrochenrationale Funktionen für $x \to \pm\infty$:
  - Zählergrad < Nennergrad: Grenzwert 0
  - Zählergrad = Nennergrad: Grenzwert $\frac{a_n}{b_n}$ (Quotient der Leitkoeffizienten); oft ist auch hier eine Polynomdivision sinnvoll!
  - Zählergrad > Nennergrad: Funktionsterm mittels Polynomdivision in eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion umschreiben; der Grenzwert der echt gebrochenrationalen Funktion ist dann immer 0
- $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; entsprechend für e^{-x}; $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

  (kurze, aber mathematisch falsche (!) Schreibweise: $e^{\infty} = \infty; e^{-\infty} = 0; \ln\infty = \infty; \ln 0 = -\infty$ *)*
- da e^x und ln x stetig sind, kann man hier erst mal den Grenzwert des Arguments berechnen und daraus den Grenzwert der ganzen Funktion folgern, z. B.: $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{x^2}{x+6}\right) = -\infty$, da $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x+6} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
- $\infty + c = \infty + \infty = \infty$; $c \cdot \infty = \infty$ für c > 0 bzw. $= -\infty$ für c < 0; $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\frac{c}{\infty} = 0$; $\frac{c}{0} = \infty$ oder $= -\infty$ (i. A. links- und rechtsseitigen Grenzwert unterscheiden!)

Regel von de L'Hospital: ***(lim nicht vergessen!)***

steht für $\frac{\infty}{\infty}$ und für $\frac{0}{0}$ in der Formelsammlung; ist auch für $0 \cdot \infty$ anwendbar, indem man das Produkt als Quotient schreibt: z. B. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \underset{dH}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (*Faustregel: $e^{\cdots}$ schreibt man im Bruch immer nach unten, ln(...) immer nach oben!*), und auch für $\infty - \infty$, wenn man geeignet ausklammert: z. B. $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \infty \cdot \left(1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) \underset{dH}{=} \infty \cdot \left(1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}\right) = \infty \cdot (1-0) = \infty$

Asymptoten und stetig behebbare Definitionslücken:

- Gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$, so hat der Graph die waagrechte Asymptote (mit der Gleichung) y = c
- Gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, so kann man überprüfen, ob man f(x) als Summe aus einer linearen Funktion und einer Funktion g schreiben kann (also f(x) = mx + t + g(x)), für die $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ gilt; wenn ja, dann hat der Graph die schräge Asymptote (mit der Gleichung) y = mx + t
  - Beispiel 1: gebrochenrationale Funktionen mit Zählergrad gleich Nennergrad + 1; nach Polynomdivision ergibt sich eine lineare plus eine echt gebrochenrationale Funktion
  - Beispiel 2: $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ hat die schräge Asymptote y = 2x – 1, da $e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$
- Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ (wobei x_0 eine Definitionslücke ist!) mit einer beliebigen reellen Zahl c, dann ist x_0 eine stetig behebbare Definitionslücke. Dies kann bei gebrochenrationalen Funktionen nur dann

auftreten, wenn x_0 eine Nullstelle von Zähler <u>und</u> Nenner ist; man muss dann versuchen, ob man den zugehörigen Faktor $(x - x_0)$ vollständig herauskürzen kann.

- Gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (wobei x_0 eine Definitionslücke ist!), dann ist x_0 eine Polstelle. Dies kann bei gebrochenrationalen Funktionen nur dann auftreten, wenn x_0 eine Nullstelle des (vollständig gekürzten!) Nenners, aber keine Nullstelle des (vollständig gekürzten!) Zählers ist.

<u>Bruchgleichungen:</u> zunächst mit dem Hauptnenner multiplizieren und kürzen

<u>Exponentialgleichungen:</u> die Potenz isolieren, dann auf beiden Seiten den (passenden) Logarithmus nehmen

<u>(natürliche) Logarithmusgleichungen:</u> den Logarithmus isolieren, dann auf beiden Seiten „e hoch" machen

<u>Ungleichungen:</u>

- zunächst die zugehörige Gleichung lösen; außerdem Definitionslücken des Terms bestimmen
- mit Hilfe dieser Ergebnisse eine Vorzeichentabelle aufstellen (beachte: das Vorzeichen kann sowohl bei Nullstellen als auch bei Definitionslücken wechseln!) oder den Graph skizzieren

<u>Integration:</u>

- Bei unbestimmten Integralen (keine Zahlen am Integralzeichen) ist das Ergebnis eine beliebige Stammfunktion plus C (!), bei bestimmten Integralen (Zahlen am Integralzeichen) schreibt man eine beliebige Stammfunktion (plus C nicht nötig) in die eckigen Klammern mit den Grenzen hinten dran und berechnet dann „obere Grenze minus unter Grenze".
- Flächenstücke über der x-Achse mit +, Flächen unter der x-Achse mit – berechnen (oder einfach den Betrag nehmen); wenn es mehrere Nullstellen gibt, jedes Flächenstück einzeln mit entsprechendem Vorzeichen berechnen
- Bei Flächenstücken zwischen Kurven immer über „obere Funktion minus untere Funktion" integrieren; dabei erst die Differenz ausrechnen und vereinfachen, dann die Stammfunktion bilden! Wenn es mehrere Schnittstellen gibt, jedes Flächenstück einzeln berechnen und jeweils darauf achten, welcher Graph oben liegt (oder einfach jeweils den Betrag nehmen).
- allgemeine Regeln:
  - eine Stammfunktion zu e^{ax+b} ist $\frac{1}{a}e^{ax+b}$ (Verallgemeinerung von: „eine Stammfunktion zu e^x ist e^x")
  - eine Stammfunktion zu $(ax+b)^n$ ist $\frac{1}{a}\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}$ (für $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$)

    bzw. $\frac{1}{a}\ln|ax+b|$ (für $n = -1$) (Verallgemeinerung von: „eine Stammfunktion zu x^n ist $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ bzw. $\ln|x|$")
  - außerdem immer auch an die grundlegenden Regeln $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$ und $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ denken, die ja auch in der Formelsammlung stehen!
- gebrochenrationale Funktionen, bei denen der Nenner nur eine Potenzfunktion ist, teilt man auf in eine Summe von Brüchen und integriert jeden einzeln
- bei anderen gebrochenrationale Funktionen, bei denen der Zählergrad größer oder gleich als der Nennergrad ist, ***führt man erst mal eine Polynomdivision durch!!! (das wird STÄNDIG falsch gemacht, also passen Sie hier gefälligst auf!!!)***

Interpretation von Ableitung / Integral im Sachzusammenhang:

- Stellt eine Funktion f die Abhängigkeit einer Größe von der Zeit dar, so gibt ihre Ableitungsfunktion (also die Tangentensteigung / der Differenzialquotient) die momentane Änderungsrate dieser Größe an; die Sekantensteigung / Differenzenquotient gibt die mittlere Änderungsrate in einem Zeitintervall an. Beispiel:

  Gibt T(t) die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit 12 Uhr) an, dann gibt $\dot{T}(3)$ an, wie schnell sich die Temperatur um 15 Uhr geändert hat, und $\frac{T(5)-T(2)}{5-2}$ gibt an, wie schnell sich die Temperatur im Mittel zwischen 14 und 17 Uhr geändert hat.
- Das Integral über die Änderungsrate einer Größe ergibt die gesamte Änderung dieser Größe. Beispiele:
  - Das Integral zwischen den Zeiten „1 Tag“ und „4 Tage“ über den Gewichtsverlust pro Tag ergibt den gesamten Gewichtsverlust zwischen dem 1. und dem 4. Tag.
  - Das Integral über eine (zeitlich veränderliche) Geschwindigkeit ergibt die zurück gelegte Strecke.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

- Laut Formelsammlung ist eine Funktion stetig an einer Stelle x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Zu überprüfen ist aber eigentlich immer die Stetigkeit an „Nahtstellen“ von abschnittsweise definierten Funktionen. Da die Funktion aber links und rechts der „Nahtstelle“ unterschiedliche Funktionsterme hat, braucht man dort zwei Grenzwerte – eben den links- und den rechtsseitigen. Diese beiden muss man also berechnen, dazu den Funktionswert; nur wenn alle drei Werte gleich sind, ist die Funktion stetig bei x_0.
- Laut Formelsammlung ist eine Funktion differenzierbar an einer Stelle x_0, wenn dort der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert. Dies ist aber meist recht kompliziert zu überprüfen. Alternativ macht man statt dessen normalerweise folgendes: zunächst mal die Ableitung der (abschnittsweise definierten) Funktion berechnen. Dabei aber ***Vorsicht:*** ob es an der Stelle x_0 selbst eine Ableitung gibt oder nicht, weiß man noch nicht – das will man ja erst heraus finden! Deswegen schreibt man bei der Ableitung der abschnittsweise definierten Funktion ***nicht*** mehr „$x \leq x_0$“ bzw. „$x \geq x_0$“, sondern nur noch „$x<x_0$“ bzw. „$x>x_0$“! Von der Ableitung berechnet man dann wiederum den links- und den rechtsseitigen Grenzwert (den Funktionswert kann man hier nicht berechnen, weil’s ja hier gerade darum geht, ob es diesen Wert überhaupt gibt!). Sind beide Werte gleich, und ist die Funktion außerdem stetig bei x_0 ***(!!!)***, so ist sie differenzierbar bei x_0.

  (Anmerkung: wenn diese beiden Grenzwerte nicht existieren, kann die Funktion trotzdem an dieser Stelle differenzierbar sein (siehe Beispiel in Wikipedia!) – das sollte an der Schule aber eigentlich nie vorkommen...)