Wichtiges zur Analysis

wichtiges Grundwissen zu ganzrationalen Funktionen: (Vielfachheiten, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$): siehe entsprechendes Blatt!

Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

- Zu überprüfen ist eigentlich immer nur die Stetigkeit an „Nahtstellen“ von abschnittsweise definierten Funktionen. Da die Funktion links und rechts der „Nahtstelle“ unterschiedliche Funktionsterme hat, braucht man zwei Grenzwerte – den links- und den rechtsseitigen. Diese beiden muss man also berechnen, dazu den Funktionswert ***(!!!)***; nur wenn alle ***drei*** Werte gleich sind, ist die Funktion stetig bei x_0.
- Auch hier ist eigentlich immer nur die Differenzierbarkeit an „Nahtstellen“ abschnittsweieser definierter Funktionen zu prüfen. Dafür prüft man erst mal die Stetigkeit; ist die Funktion nicht stetig, so ist sie auch nicht differenzierbar! Ist sie stetig, so berechnet man zunächst mal die Ableitung der Funktion. Dabei aber ***Vorsicht:*** ob es an der Stelle x_0 selbst eine Ableitung gibt oder nicht, weiß man noch nicht – das will man ja erst heraus finden! Deswegen schreibt man bei der Ableitung der abschnittsweise definierten Funktion ***nicht*** mehr „$x \leq x_0$“ bzw. „$x \geq x_0$“, sondern nur noch „$x<x_0$“ bzw. „$x>x_0$“! Von der Ableitung berechnet man dann wiederum den links- und den rechtsseitigen Grenzwert (den Funktionswert kann man hier nicht berechnen, weil's ja hier gerade darum geht, ob es diesen Wert überhaupt gibt!). Sind beide Werte gleich (und ist die Funktion außerdem stetig, s.o.), so ist sie differenzierbar bei x_0.

Tangentengleichung:
Normalerweise ist die Tangente an einer Stelle x_0 gefragt. Dafür berechnet man erst mal den y-Wert des Punktes, durch den die Tangente verläuft ($y = f(x_0)$) und die Steigung der Tangente ($m_t = f\,'(x_0)$). Daraus ermittelt man (wie aus früheren Klassen bekannt!) die Geradengleichung: $y = m_t\, x + c$ hinschreiben (mit dem eben berechneten m_t), Punkt einsetzen, daraus den y-Achsenabschnitt c berechnen; am Schluss die Gleichung hinschreiben.
oder: Formel aus der Merkhilfe verwenden! (Seite 2)

Normalengleichung:
Prinzipiell genauso wie die Tangentensteigung; die Steigung der Normalen erhält man aus $m_n \cdot m_t = -1$.

zwei Graphen parallel zueinander (selbe Steigung):
Die Steigungen müssen gleich sein, man muss also die Gleichung $f\,'(x) = g'(x)$ lösen.

zwei Graphen senkrecht zueinander:
Das Produkt der Steigungen muss –1 sein, man muss also die Gleichung $f\,'(x) \cdot g'(x) = -1$ lösen.

Monotonieintervalle:
Hier geht's darum, heraus zu finden, wo der Graph einer Funktion steigt bzw. fällt. In der Formelsammlung steht schon, was man überprüfen muss – nämlich wo die 1. Ableig'(xtung größer bzw. kleiner Null ist. Das macht man am einfachsten so:

- Nullstellen von f' berechnen (also die Stellen mit waagrechter Tangente!)
- damit und mit dem Verhalten für $x \to \pm\infty$ den Graph von f' skizzieren
- da, wo der Graph von f' unter der x-Achse verläuft, macht man ein Pfeilchen nach unten hin; da, wo der Graph von f' über der x-Achse verläuft, ein Pfeilchen nach oben
- in den Intervallen mit Pfeilchen nach unten fällt der Graph von f streng monoton, in den Intervallen mit Pfeilchen nach oben steigt er streng monoton

Krümmungsintervalle:
Geht im Prinzip genauso wie Monotonie – nur braucht man f'' statt f ', und statt Pfeilchen schreibt man R (Graph von f '' unter der x-Achse) bzw. L (Graph von f '' über der x-Achse) hin (siehe auch Formel-sammlung!)

<u>Punkte mit waagrechter Tangente (Extrem- und Terrassenpunkte):</u>

- Dies sind die Punkte, bei denen die 1. Ableitung den Wert 0 hat. Also muss man erst mal die 1. Ableitung gleich 0 setzen und die entsprechenden Stellen (x-Werte) berechnen.
- Dann sollte man zunächst unterscheiden zwischen Extrempunkten und Terrassenpunkten.
  - Extrempunkte erkennt man prinzipiell daran, dass die 1. Ableitung dort das Vorzeichen wechselt (VZW); das kann man direkt nachrechnen, oder man schaut sich den Graph von f’ an (siehe Monotonieintervalle), oder man überprüft, ob die Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle von f ’ ungerade ist (einfache, dreifache, ... Nullstelle).
  - Bei Terrassenpunkten hat man dagegen keinen VZW von f’, was man z. B. daran erkennt, dass die Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle von f’ gerade ist (doppelte, vierfache, ... Nullstelle). Eine andere Möglichkeit ist es, zu überprüfen, ob es sich bei dem Punkt mit waagrechter Tangente gleichzeitig um einen Wendepunkt handelt.
- Bei den Extrempunkten gibt es wieder zwei Möglichkeiten: Hoch- oder Tiefpunkte.
  - Bei Hochpunkten wechselt die 1. Ableitung ihr Vorzeichen von + zu –. Einfacher als das Überprüfen des VZW ist es meist, den x-Wert in die 2. Ableitung einzusetzen. Ist das Ergebnis kleiner als 0, so handelt es sich um einen Hochpunkt. (*Anmerkung: das klappt nur bei einfachen Nullstellen von f’! aber meist hat man sowieso keine höheren Vielfachheiten...)*
  - Bei Tiefpunkten wechselt entsprechend die 1. Ableitung ihr Vorzeichen von – zu +. Einfacher ist es wieder mit der 2. Ableitung: hier muss das Ergebnis größer als 0 sein.
  - ***Vorsicht:*** Hat die 2. Ableitung den Wert 0, so ***kann*** es sich um einen Terrassenpunkt handeln – muss es aber nicht sein!!! In diesem Fall muss man noch mal genauer nachprüfen – siehe oben bei Terrassenpunkten!
- Sind nur die *Stellen* mit waagrechter Tangente / Extrem*stellen* gesucht, dann ist man jetzt fertig; sind die *Punkte* gesucht, so muss man noch die y-Werte berechen – also die x-Werte in die Funktion selbst einsetzen!
- Allgemein gilt: eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n–1 Punkte mit waagrechter Tangente, also auch höchstens n–1 Extrempunkte. (*außerdem gilt übrigens auch: ist der Grad gerade bzw. ungerade, so ist die Anzahl der Extrempunkte ungerade bzw. gerade*)

<u>Wendepunkte:</u>

- Zunächst muss man die Stellen berechnen, an denen die 2. Ableitung gleich 0 ist („Flachstellen“).
- Dann muss man überprüfen, ob es sich hierbei wirklich um Wendestellen handelt. Das erkennt man folgendermaßen:
  - die 2. Ableitung hat hier einen VZW
    - kann man direkt ausrechnen
    - oder mit Hilfe der Krümmungsintervalle überprüfen – siehe oben)
    - oder daran erkennen, dass die 2. Ableitung hier eine Nullstelle mit ungerader Vielfachheit hat (einfache, dreifache, ... Nullstelle)
  - oder man setzt den x-Wert in die 3. Ableitung ein; ist das Ergebnis nicht 0, so ist der x-Wert eine Wendestelle ((*Anmerkung: das klappt nur bei einfachen Nullstellen von f’’! aber meist hat man sowieso keine höheren Vielfachheiten...)*
  - ***Vorsicht:*** Hat die 3. Ableitung den Wert 0, so ***kann*** es trotzdem eine Wendestelle sein – muss es aber nicht sein!!! In diesem Fall muss man noch mal genauer nachprüfen – siehe oben bei VZW!
- Sind nur die Wende*stellen* gesucht, dann ist man jetzt fertig; sind die *Punkte* gesucht, so muss man noch die y-Werte berechen – also die x-Werte in die Funktion selbst einsetzen!
- Soll man überprüfen, ob ein Wendepunkt ein Terrassenpunkt ist, so setzt man den x-Wert noch in die 1. Ableitung ein und schaut, ob 0 heraus kommt.
- Allgemein gilt: eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n–2 Wendepunkte. (*außerdem gilt übrigens auch: ist der Grad gerade bzw. ungerade, so ist die Anzahl der Wendepunkte gerade bzw. ungerade*)

<u>Extremwertprobleme:</u>
Man kann nicht viele allgemeine Tipps geben, aber sinnvoll ist eigentlich immer:

- allgemeine Formeln heraussuchen (für die gesuchte Größe, z. B. Flächeninhalt, und für Nebenbedingungen, z. B. Umfang)
- möglichst viele Angaben aus der Aufgabe in diese Formeln einsetzen (sowohl in die Formel für die gesuchte Größe als auch in die Nebenbedingungen)
- aus den Nebenbedingungen die noch fehlenden Variablen in der Formel für die gesuchte Größe ermitteln – dann sollte man eigentlich (evtl. nach einigen Umformungen) die gesuchte Funktion heraus bekommen
- für die Definitionsmenge (praktisch immer ein Intervall!) ist folgendes hilfreich:
    - manchmal kann man die Ränder direkt ablesen, z. B. indem man schaut, wie groß eine Länge überhaupt werden kann (z. B. kann eine Seitenlänge eines Rechtsecks nie größer als die Diagonale sein)
    - hilfreich kann oft sein, zu überprüfen, dass alle vorkommenden Längen positiv sein müssen; aus der/n entsprechenden Ungleichung(en) erhält man die Ränder
    - oft sind die Ränder der Definitionsmenge Nullstellen der Funktion – wenn also sonst nichts hilft, dann rechnet man sich die Nullstellen aus und nimmt zwei davon, die sinnvoll aussehen, als Ränder (der untere Rand ist fast immer 0!)
- zwei Ableitungen bilden
- relative Extremstellen suchen (erste Ableitung gleich 0, Variable berechnen, in zweite Ableitung einsetzen bzw. VZW der ersten Ableitung – s. o.), Wert der gesuchten Größe dafür berechnen
- absolute Extremstelle suchen (z. B. durch Vergleich mit den Werten an den Rändern des Definitionsbereichs)

Vorsicht: Sind Stellen mit maximaler Steigung / stärkstem Gefälle oder ähnlichem gesucht, so will man eine Extremstelle der 1. Ableitung haben, nicht von der Funktion selbst! Man muss also die 1. Ableitung der 1. Ableitung, sprich: die 2. Ableitung (!), gleich 0 setzen, und das Ergebnis dann in die 2. Ableitung der 1. Ableitung, sprich: die 3. Ableitung (!), einsetzen! (oder anders gesagt: man sucht nicht Extremstellen, sondern Wendestellen der Funktion selbst – so steht's auch in der Formelsammlung...)

<u>Funktionsterme aufstellen:</u> siehe entsprechendes Blatt!

<u>Integration:</u>

- Das „Aufleiten" von ganzrationalen Funktionen ist einfach: man schaut jeden Summanden einzeln an, erhöht erst mal die Hochzahl um 1 und schaut dann, wie der Vorfaktor jeweils aussehen muss, damit beim Ableiten wieder das richtige rauskommt (im Prinzip einfach den Vorfaktor durch die neue, erhöhte (***!***) Hochzahl teilen). ***Vorsicht:***
    - Die Aufleitung eines konstanten Summanden ist genau diese Konstante mal x! (weil eine konstanter Summand für „Konstante mal x^0" steht); beispielsweise ist die Aufleitung von 5 gleich 5x.
    - Der Funktionsterm muss als Summe gegeben sein! Ist er als Produkt vorgegeben, dann muss man erst mal die Klammern auflösen!
- Bei unbestimmten Integralen (keine Zahlen am Integralzeichen) ist das Ergebnis eine beliebige Stammfunktion (also hinten + C hinschreiben!), bei bestimmten Integralen (Zahlen am Integralzeichen) schreibt man eine beliebige Stammfunktion (+ C nicht nötig) in die eckigen Klammern mit den Grenzen hinten dran und berechnet dann „obere Grenze minus unter Grenze" (siehe Formelsammlung!).
- Ist eine bestimmte Stammfunktion gesucht (z. B. ein Punkt vorgegeben, durch den sie durchgehen soll), so schreibt man sich erst mal eine allgemeine Stammfunktion hin (also mit + C) und rechnet dann mit der vorgegebenen Bedingung das C aus (z. B. Punkt einsetzen). Das braucht man übrigens auch manchmal beim Aufstellen von Funktionstermen!
- Flächenstücke über der x-Achse mit +, Flächen unter der x-Achse mit – berechnen (oder einfach den Betrag nehmen); wenn es mehrere Nullstellen gibt, jedes Flächenstück einzeln mit entsprechendem Vorzeichen berechnen

- Bei Flächenstücken zwischen Kurven immer über „obere Funktion minus untere Funktion“ integrieren; dabei erst die Differenz ausrechnen und vereinfachen, dann die Stammfunktion bilden! Wenn es mehrere Schnittstellen gibt, jedes Flächenstück einzeln berechnen und jeweils darauf achten, welcher Graph oben liegt (oder einfach jeweils den Betrag nehmen).
- Symmetrie ausnutzen! Wenn der Integrand (die Funktion, die hinter dem Integralzeichen steht) symmetrisch zur y-Achse oder zum Ursprung ist (geht in beiden Fällen gleich!), dann rechnet man sich nur den Flächeninhalt auf einer Seite aus und verdoppelt das Ergebnis am Schluss – das spart viel Arbeit! (weil dann die eine Integrationsgrenze gleich 0 ist)