

Weitere Integrationsregeln

1. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(-x)$ (Kettenregel!). Geben Sie außerdem die maximal mögliche Definitionsmenge dieser Funktion an. Was folgt daraus für die Ableitung und die Definitionsmenge von $f(x) = \ln|x|$? Was folgt daraus für das Integral $\int \frac{1}{x} dx$?

2. Das Integral $\int \frac{2x^2-3x+5}{x^2} dx$ ist nicht direkt berechenbar. Teilen Sie den Bruch in eine Summe von drei Brüchen auf, kürzen Sie und berechnen Sie damit das ursprüngliche Integral.

3. Begründen Sie, dass $(\ln|2x-1|)' = \frac{2}{2x-1}$ ist. Was gilt allgemein für die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln|ax+b|$? Was folgt für das Integral $\int \frac{1}{ax+b} dx$? *Zusatzfragen:* Außerdem kann man das Integral durch Ausklammern auch schreiben als $\int \frac{1}{a(x+\frac{b}{a})} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x+\frac{b}{a}} dx$. Was folgt damit für den Wert des Integrals? Wieso widerspricht dies nicht dem ersten Ergebnis, das Sie erhalten hatten?

4. Das Integral $\int \frac{x^2+3x-2}{x-1} dx$ ist nicht direkt berechenbar. Schreiben Sie den Integranden mit Hilfe einer Polynomdivision um und berechnen Sie mit dem Ergebnis das Integral.

5. Zeigen Sie, dass $(\ln |x^2 + 1|)' = \frac{2x}{x^2+1}$ ist. Was folgt daraus für das Integral $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$? Was folgt allgemeiner für die Ableitung von $\ln |f(x)|$ und das Integral $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$? Benutzen Sie dieses allgemeine Ergebnis, um $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ zu berechnen.