

Weitere Integrationsregeln

1. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(-x)$ (Kettenregel!). Geben Sie außerdem die maximal mögliche Definitionsmenge dieser Funktion an. Was folgt daraus für die Ableitung und die Definitionsmenge von $f(x) = \ln|x|$? Was folgt daraus für das Integral $\int \frac{1}{x} dx$?

2. Das Integral $\int \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2} dx$ ist nicht direkt berechenbar. Teilen Sie den Bruch in eine Summe von drei Brüchen auf, kürzen Sie und berechnen Sie damit das ursprüngliche Integral.

3. Begründen Sie, dass $(\ln|2x - 1|)' = \frac{2}{2x-1}$ ist. Was gilt allgemein für die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln|ax + b|$? Was folgt für das Integral $\int \frac{1}{ax+b} dx$? *Zusatzfragen:* Außerdem kann man das Integral durch Ausklammern auch schreiben als $\int \frac{1}{a(x+\frac{b}{a})} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x+\frac{b}{a}} dx$. Was folgt damit für den Wert des Integrals? Wieso widerspricht dies nicht dem ersten Ergebnis, das Sie erhalten hatten?

4. Das Integral $\int \frac{x^2+3x-2}{x-1} dx$ ist nicht direkt berechenbar. Schreiben Sie den Integranden mit Hilfe einer Polynomdivision um und berechnen Sie mit dem Ergebnis das Integral.

5. Zeigen Sie, dass $(\ln |x^2 + 1|)' = \frac{2x}{x^2+1}$ ist. Was folgt daraus für das Integral $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$? Was folgt allgemeiner für die Ableitung von $\ln |f(x)|$ und das Integral $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$? Benutzen Sie dieses allgemeine Ergebnis, um $\int \tan(x) dx$ zu berechnen.

6. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Kettenregel!) und vereinfachen Sie das Ergebnis. Was folgt daraus für das Integral $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$?

7. Das Integral $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ ist nicht direkt berechenbar. Schreiben Sie den Integranden mit Hilfe einer Polynomdivision um und berechnen Sie mit dem Ergebnis das Integral.

8. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan\left(\frac{x+b}{a}\right)$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Kettenregel!) und vereinfachen Sie das Ergebnis. Was folgt daraus für das Integral $\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2} dx$? Wie könnten Sie vorgehen, wenn Sie ein Integral der Form $\int \frac{1}{a^2+(cx+b)^2} dx$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben? (*Tipp*: Ähnlich wie in den Zusatzfragen bei Aufgabe 3.)

9. Bringen Sie den Integranden in $\int \frac{1}{2x^2+4x+4} dx$ auf die Form aus 8. (Tipp: quadratische Ergänzung!) und berechnen Sie damit das Integral.