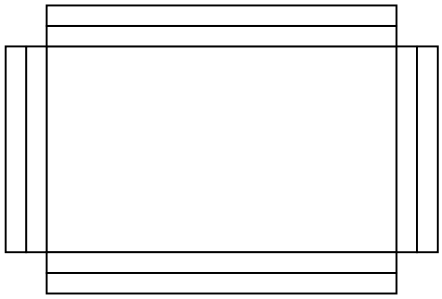
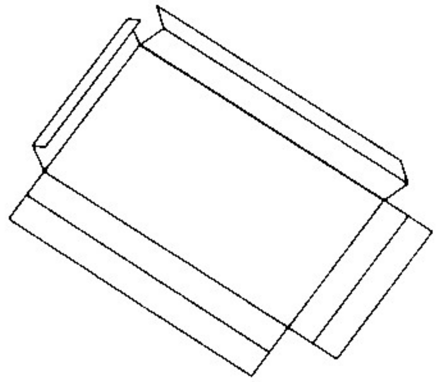
Weitere Anwendungen von ganzrationalen Funktionen

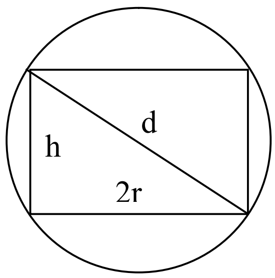
1.0 Um Obstkisten aus Pappe herzustellen, werden aus rechteckigen Kartonplatten (Länge 16 dm, Breite 12 dm) an den vier Ecken jeweils Quadrate abgeschnitten. Anschließend werden die Seitenteile so gefaltet, dass doppelwandige Seiten mit der Höhe x entstehen (siehe Skizze):





1.1 Ermitteln Sie das Volumen V einer solchen Obstkiste in Abhängigkeit von ihrer Höhe x (mögliches Ergebnis: $V(x) = 16\,x^3 - 112\,x^2 + 192\,x$; Einheiten können ignoriert werden) und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge D_V an.
1.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten.
1.3 Das Volumen wird für eine Höhe von (etwa) x = 1,1 am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen (runden Sie auf eine ganze Zahl).
1.4 Skizzieren Sie den Graph von V im Bereich $0 \le x \le 3$ mit Hilfe *aller* bisherigen Ergebnisse.
1.5 Berechnen Sie auf 2 Dezimalen genau, für welche Höhen x das Volumen größer als 64 (dm^3) ist.
(nach einem Abschlussprüfungs-Nachtermin)

2.0 Eine Holzkugel mit dem Durchmesser d = 20 cm soll so abgeschliffen werden, dass ein Zylinder entsteht:

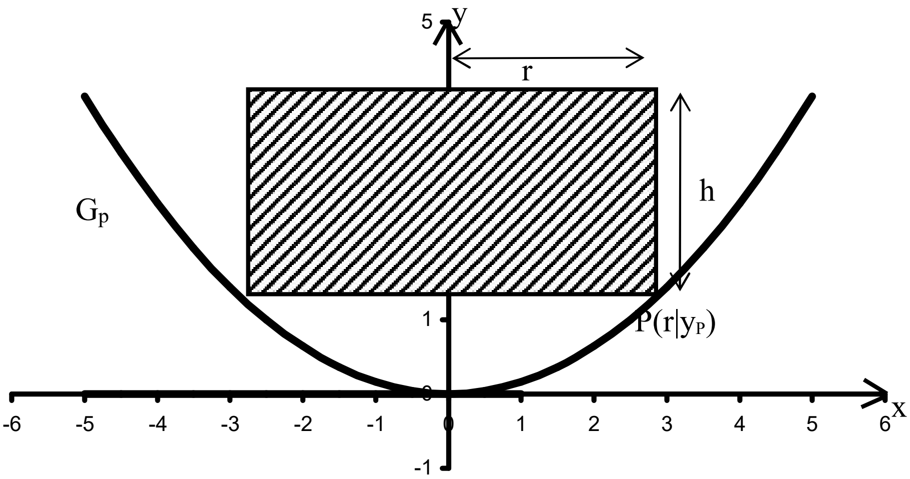


2.1 Zeigen Sie, dass für den Rauminhalt V des Zylinders (in cm^3) in Abhängigkeit von seiner Höhe h (in cm) gilt:

$$V(h) = \frac{\pi}{4}\,(-h^3 + 400\,h)$$

und geben Sie eine im Zusammenhang der Aufgabenstellung sinnvolle Definitionsmenge D_V an.
2.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten.
2.3 Das Volumen wird für eine Höhe von (etwa) h = 12 am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen (runden Sie auf eine ganze Zahl).
2.4 Skizzieren Sie den Graph von V im Bereich $0 \le h \le 20$ mit Hilfe *aller* bisherigen Ergebnisse.
2.5 Berechnen Sie auf 2 Dezimalen genau, für welche Höhen h das Volumen größer als 198π (cm^3) ist.

3.0 Ein zylinderförmiger Käselaib (Radius r, Höhe h) soll in einer großen Schüssel gelagert werden, deren Querschnitt parabelförmig ist. Der obere Rand des Käselaibs soll dabei mit dem oberen Rand der Schüssel (y = 4) bündig abschließen, unten liegt der Käselaib auf der Schüssel auf (Punkt P in Skizze).



Die Parabel p hat den Funktionsterm $p(x) = 0{,}16\,x^2$ und die Definitionsmenge $D_p = [-5;5]$ (alle Maße in dm; auf Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.)

3.1 Berechnen Sie die Höhe h des Käselaibs in Abhängigkeit von seinem Radius r und damit sein Volumen V (mögliches Ergebnis: $V(r) = 0{,}16\,\pi\,(-r^4 + 25\,r^2)$) und geben Sie eine im Zusammenhang der Aufgabenstellung sinnvolle Definitionsmenge D_V an.

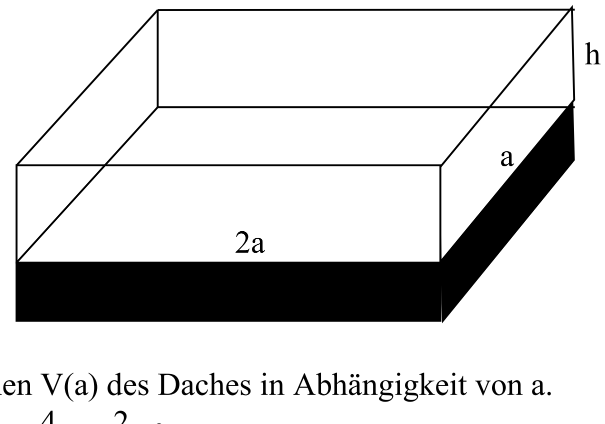
3.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten.

3.3 Das Volumen wird für einen Radius von (etwa) r = 3,5 am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen (runden Sie auf eine Nachkommastelle).

3.4 Skizzieren Sie den Graph von V im Bereich $0 \le r \le 5$ mit Hilfe *aller* bisherigen Ergebnisse.

3.5 Berechnen Sie auf 2 Dezimalen genau, für welche Radien r das Volumen größer als $3{,}84\pi$ (dm^3) ist.

4.0 Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Breite a, der Länge 2a und der Höhe h. Dieses wird auf eine geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll 4 m^2 betragen. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



4.1 Bestimmen Sie das Volumen V(a) des Daches in Abhängigkeit von a.

(mögliches Ergebnis: $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$)

4.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion V einschließlich ihrer Vielfachheiten und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge D_V an.

4.3 Das Volumen wird für eine Breite von (etwa) a = 0,8 am größten. Berechnen Sie dieses größte Volumen (runden Sie auf drei Nachkommastellen).

4.4 Skizzieren Sie den Graph von V im Bereich $0 \le a \le 1{,}5$ mit Hilfe *aller* bisherigen Ergebnisse.

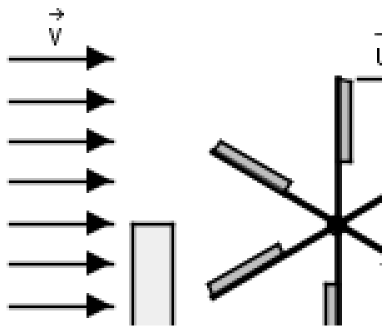
4.5 Berechnen Sie auf 2 Dezimalen genau, für welche Breiten a das Volumen größer als $\frac{2}{3}$ (m^3) ist.

(nach Abschlussprüfung 2010 – AI)

__nur für Technik-Zweig:__

5.0 Zur Nutzung der Windenergie kann dem Wind Leistung durch einen so genannten „Widerstandsläufer“ (persisches Windrad) entnommen werden.
Die im Wind enthaltene Leistung P_0 und die davon nutzbare Leistung P_N werden folgendermaßen berechnet:

Persisches Windrad



$$P_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \quad \text{und} \quad P_N = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot (v-u)^2 \cdot u$$

A: angeströmte Fläche in m^2 ρ: Luftdichte in $\frac{kg}{m^3}$

c_w: Widerstandsbeiwert v: Windgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$

u: Umfangsgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$

Die Schnelllaufzahl λ ist das Verhältnis aus Umfangsgeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit: $\lambda = \frac{u}{v}$ wobei gilt: $u < v$. Die Leistungsausbeute eines Windrades kann über den Leistungsbeiwert c_p berechnet werden. Der Leistungsbeiwert ist das Verhältnis der dem Wind entnommenen Leistung P_N zur im Wind enthaltenen Leistung P_0.

5.1 Ermitteln Sie die Funktionsgleichung des Leistungsbeiwertes $c_p(\lambda)$ mit einem geeigneten Definitionsbereich. [Mögliches Teilergebnis: $c_p(\lambda) = c_w \cdot (1-\lambda)^2 \cdot \lambda$]

5.2 Der Leistungsbeiwert $c_p(\lambda)$ erreicht bei einer Schnelllaufzahl von $\lambda = \frac{1}{3}$ seinen größten Wert.
Berechnen Sie, wie groß die vom Wind angeströmte Querschnittsfläche gewählt werden muss, um bei einer Windgeschwindigkeit $v = 10\ \frac{m}{s}$, einem optimalen Widerstandsbeiwert $c_w = 1{,}3$ und einer Luftdichte $\rho = 1{,}188\ \frac{kg}{m^3}$ die maximale Nutzleistung P_N = 1,0 kW zu erhalten.

[Hinweis: $1\ J = 1\ Ws = 1\ Nm = 1\ \frac{kg\,m^2}{s^2}$]

(aus Abschlussprüfungs-Nachtermin 2005)

Lösungen

1.1 $V = \ell \cdot b \cdot h$; aus der Skizze: $h = x$; $\ell = 16 - 4x$; $b = 12 - 4x$ (doppelwandig!)
alles einsetzen: $V(x) = (16 - 4x) \cdot (12 - 4x) \cdot x = ... = 16x^3 - 112x^2 + 192x$ (Klammern nicht vergessen!)
$h > 0 \Rightarrow x > 0$ und $b > 0 \Rightarrow 12 - 4x > 0 \Rightarrow x < 3$ (und $\ell > 0 \Rightarrow 16 - 4x > 0 \Rightarrow x < 4$)
damit: $D_V =]0;3[$

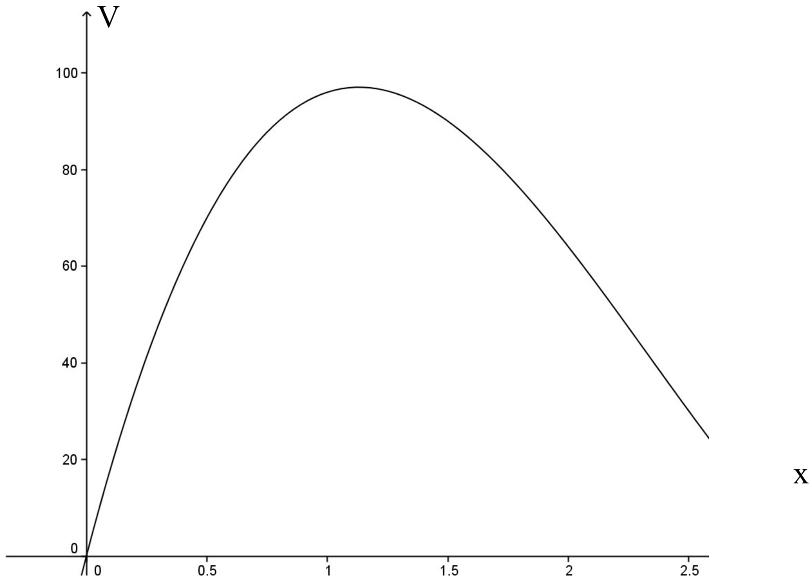
1.2 $16x^3 - 112x^2 + 192x = 0 \Rightarrow 16x \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ oder $x^2 - 7x + 12 = 0$

$x_{2,3} = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow x_2 = 3$ (; $x_3 = 4$) alle einfach

oder schneller: $(16 - 4x) \cdot (12 - 4x) \cdot x = 0 \Rightarrow 16 - 4x = 0$ oder $12 - 4x = 0$ oder $x = 0$
$\Rightarrow$ ($x_1 = 4$;) $x_2 = 3$; $x_3 = 0$ alle einfach

1.3 $V(1{,}1) = 16 \cdot 1{,}1^3 - 112 \cdot 1{,}1^2 + 192 \cdot 1{,}1 \approx 97$

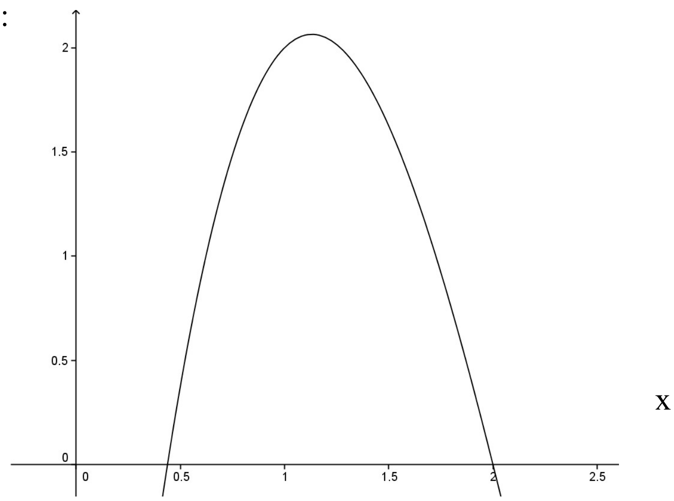
1.4



1.5 $16x^3 - 112x^2 + 192x > 64 \Rightarrow 16x^3 - 112x^2 + 192x - 64 > 0 \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 12x - 4 > 0$
Gleichung lösen: $x^3 - 7x^2 + 12x - 4 = 0$
durch Probieren: $x_1 = 2$; Polynomdivision: $(x^3 - 7x^2 + 12x - 4):(x - 2) = x^2 - 5x + 2$

$x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x_2 \approx 0{,}44$ (; $x_3 \approx 4{,}56 \notin D_V$)

Skizze:



(oder Skizze in 1.4 verwenden!)

$\Rightarrow$ Das Volumen ist größer als 64 (dm^3) für eine Höhe zwischen etwa 0,44 und 2 (dm).

2.1 $V = \pi r^2 h$; r ist noch unbekannt!
aus der Skizze: $(2r)^2 + h^2 = d^2 = 20^2$ (Satz des Pythagoras; Klammern nicht vergessen!)

$\Rightarrow 4r^2 + h^2 = 400 \Rightarrow r^2 = \dfrac{400 - h^2}{4}$; einsetzen: $V(h) = \pi\, \dfrac{400 - h^2}{4}\, h = \dfrac{\pi}{4}(-h^3 + 400\, h)$

$h > 0$ und $r > 0 \Rightarrow \dfrac{400 - h^2}{4} > 0 \Rightarrow$ ..... $h < 20$; oder einfach aus Skizze ablesen: $h < d$, also $h < 20$!

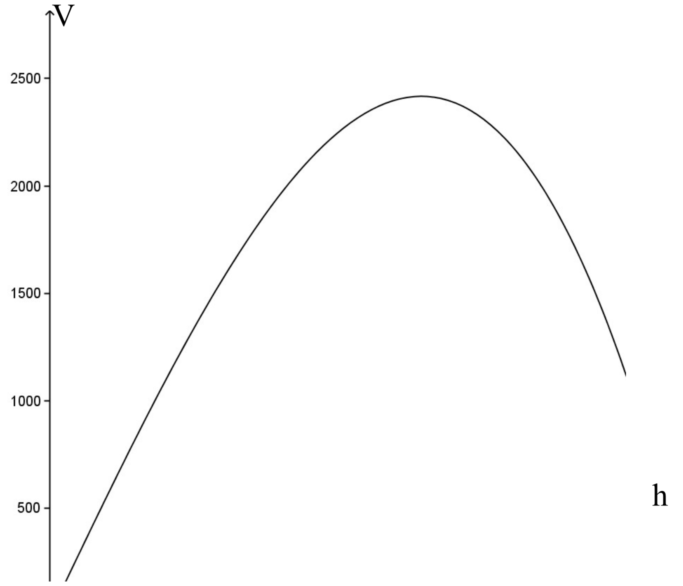
damit: $D_V =]0;20[$

2.2 $\dfrac{\pi}{4}(-h^3 + 400\, h) = 0 \Rightarrow -h^3 + 400\, h = 0 \Rightarrow -h\,(h^2 - 400) = 0 \Rightarrow -h\,(h + 20)\,(h - 20) = 0$

$\Rightarrow h_1 = 0;\ h_2 = 20\ (;\ h_3 = -20)$ alle einfach

2.3 $V(12) = \dfrac{\pi}{4}(-12^3 + 400 \cdot 12) = 768\pi \approx 2413$

2.4

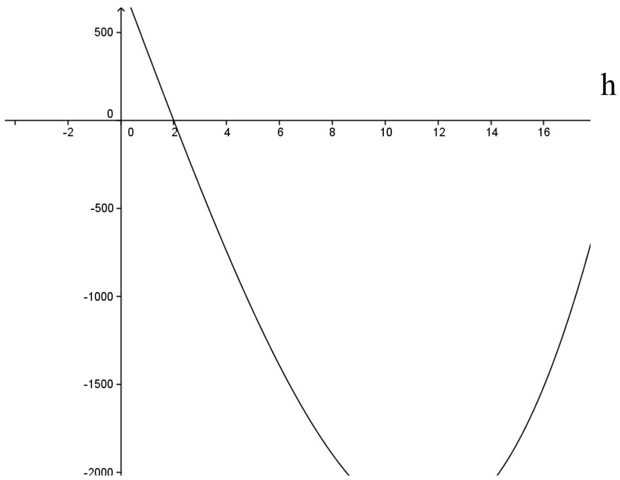


2.5 $\dfrac{\pi}{4}(-h^3 + 400\, h) > 198\pi \Rightarrow -h^3 + 400h > 792 \Rightarrow h^3 - 400h + 792 < 0$

Gleichung lösen: $h^3 - 400h + 792 = 0$
durch Probieren: $h_1 = 2$; Polynomdivision: $(h^3 + 0h^2 - 400h + 792):(h - 2) = h^2 + 2h - 396$

$h^2 + 2h - 396 = 0 \Rightarrow h_{2,3} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-396)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{1588}}{2} \Rightarrow h_2 \approx 18{,}9\ (;\ h_3 \approx -20{,}9 \notin D_V)$

Skizze:



(oder Skizze in 2.4 verwenden!)

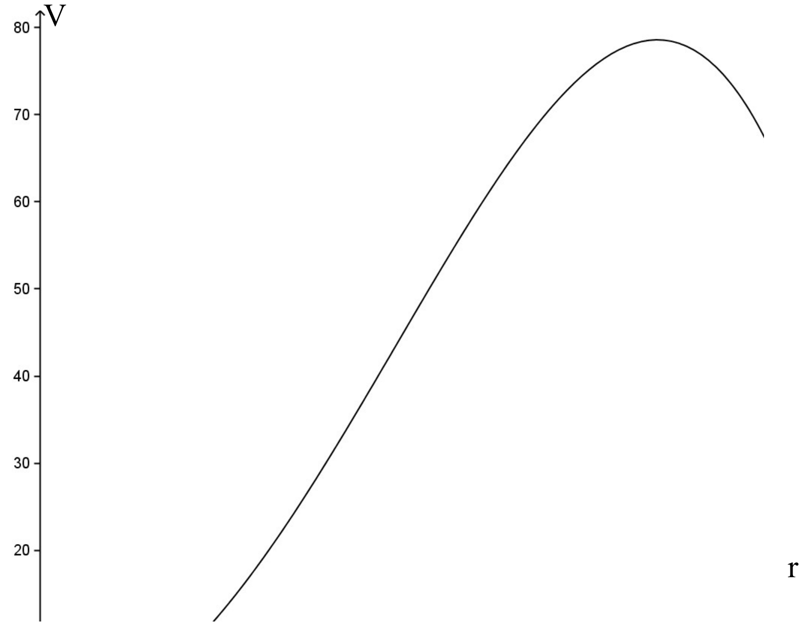
$\Rightarrow$ Das Volumen ist größer als 198π (cm^3) für eine Höhe zwischen 2 und etwa 18,9 (cm).

3.1 $V = \pi r^2 h$; h ist noch unbekannt!
aus der Skizze: $h = 4 - y_P$; P liegt auf der Parabel, der x-Wert von P ist r ➔ $y_P = 0{,}16\, r^2$ ➔ $h = 4 - 0{,}16r^2$
einsetzen: $V(r) = \pi r^2 (4 - 0{,}16r^2) = 0{,}16\, \pi\, (-r^4 + 25\, r^2)$ (Klammern nicht vergessen!)
$r > 0$ und $h > 0$ ➔ $4 - 0{,}16r^2 > 0$ ➔ ..... $r < 5$; oder einfach aus Skizze ablesen: r < Schüsselradius!
damit: $D_V =]0;5[$

3.2 $0{,}16\, \pi\, (-r^4 + 25\, r^2) = 0$ ➔ $-r^4 + 25\, r^2 = 0$ ➔ $-r^2\, (r^2 - 25) = 0$ ➔ $-r^2\, (r + 5)\, (r - 5) = 0$
➔ $r_{1,2} = 0$ doppelt; $r_3 = 20$ (; $r_4 = -5$) beide einfach

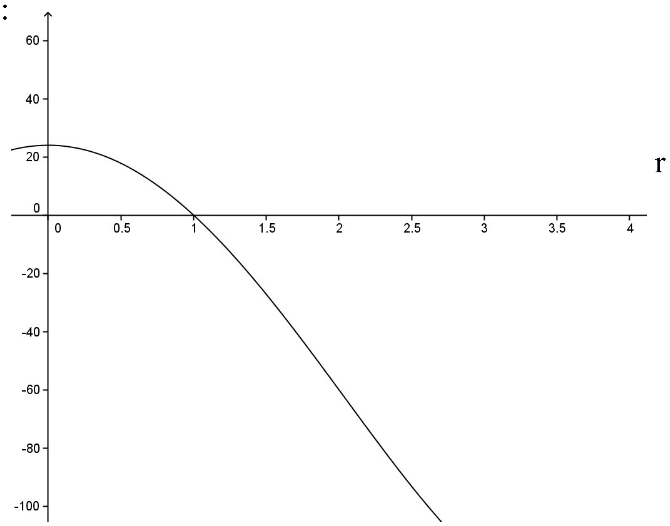
3.3 $V(3{,}5) = 0{,}16\, \pi\, (-3{,}5^4 + 25 \cdot 3{,}5^2) = 24{,}99\pi \approx 78{,}5$

3.4



3.5 $0{,}16\, \pi\, (-r^4 + 25\, r^2) > 3{,}84\pi$ ➔ $-r^4 + 25r^2 > 24$ ➔ $r^4 - 25r^2 + 24 < 0$
Gleichung lösen: $r^4 - 25r^2 + 24 = 0$

Substitution: $u = r^2$ ➔ $u^2 - 25u + 24 = 0$ ➔ $u_{1,2} = \dfrac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \dfrac{25 \pm 23}{2}$ ➔ $u_1 = 24$; $u_2 = 1$
(beide einfach)
Resubstitution: $r^2 = u$ 1) $r^2 = 24$ ➔ $r_1 = \sqrt{24} \approx 4{,}9$ 2) $r^2 = 1$ ➔ $r_2 = 1$ (nur + wegen D!)
Skizze:



(oder Skizze in 3.4 verwenden!)

➔ Das Volumen ist größer als $3{,}84\pi$ (dm^3) für einen Radius zwischen 1 und etwa 4,9 (dm).

4.1 $V = \ell \cdot b \cdot h = 2a \cdot a \cdot h = 2a^2h$; h ist noch unbekannt!
Oberfläche: $4 = 2a \cdot a + 2 \cdot 2a \cdot h + 2 \cdot a \cdot h = 2a^2 + 6ah$ (beachte: kein Boden!)

➔ $6ah = 4 - 2a^2$ ➔ $h = \dfrac{4-2a^2}{6a} = \dfrac{2}{3a} - \dfrac{1}{3}a$

einsetzen: $V(a) = 2a^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3a} - \dfrac{1}{3}a\right) = \dfrac{4}{3}a - \dfrac{2}{3}a^3$

4.2 $\dfrac{4}{3}a - \dfrac{2}{3}a^3 = 0$ ➔ $\dfrac{2}{3}a\,(2 - a^2) = 0$ ➔ $a_1 = 0$ einfach oder $2 - a^2 = 0$ ➔ $a_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ beide einfach

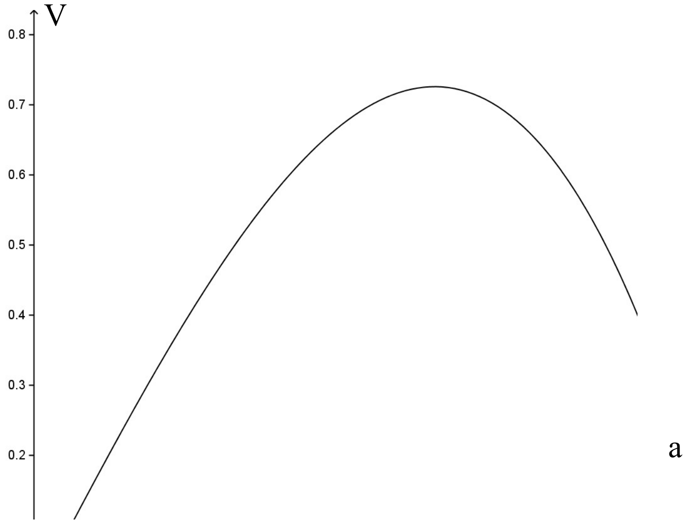
Nullstellen verwenden ➔ $D_V =]0; \sqrt{2}[$ (beachte: im Gegensatz zu sonst ***muss*** hier a = 0 ausgeschlossen werden, da die Höhe h für a = 0 nicht definiert wäre!)

oder: $a > 0$ und $h > 0$ ➔ $\dfrac{4-2a^2}{6a} > 0 \mid \cdot 6a$ ➔ $4 - 2a^2 > 0$ (Ungleichung nicht umdrehen, da a > 0!)

➔ $a < \sqrt{2}$ (nur +, da a > 0!)

4.3 $V(0{,}8) = \dfrac{4}{3} \cdot 0{,}8 - \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}8^3 \approx 0{,}725$

4.4

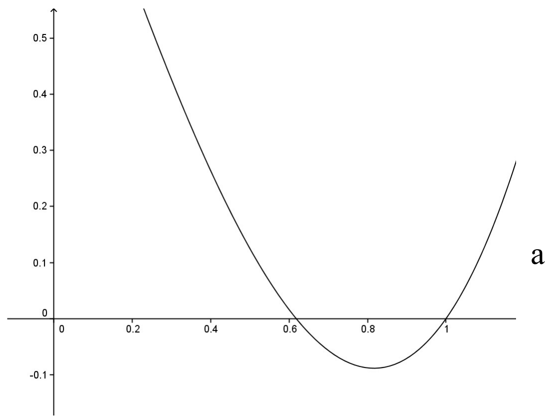


4.5 $\dfrac{4}{3}a - \dfrac{2}{3}a^3 > \dfrac{2}{3}$ ➔ $\dfrac{4}{3}a - \dfrac{2}{3}a^3 - \dfrac{2}{3} > 0$ ➔ $2a - a^3 > 0$ ➔ $a^3 - 2a + 1 < 0$

Gleichung lösen: $a^3 - 2a + 1 = 0$
durch Probieren: $a_1 = 1$; Polynomdivision: $(a^3 + 0a^2 - 2a + 1):(a - 1) = a^2 + a - 1$

$a^2 + a - 1 = 0$ ➔ $a_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ➔ $a_2 \approx 0{,}62$ (; $a_3 \approx -1{,}62 \notin D_V$)

Skizze:



(oder Skizze in 4.4 verwenden!)

➔ Das Volumen ist größer als $\dfrac{2}{3}$ (m^3) für eine Breite zwischen etwa 0,62 und 1 (m).

5.1 $\quad c_p = \frac{P_N}{P_0} = \frac{\frac{1}{2}\cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot (v-u)^2 \cdot u}{\frac{1}{2}\cdot \rho \cdot A \cdot v^3} = c_w \cdot \frac{(v-u)^2 \cdot u}{v^3} = c_w \cdot \frac{(v-u)^2}{v^2}\cdot\frac{u}{v} = c_w \cdot \frac{\left(v\left(1-\frac{u}{v}\right)\right)^2}{v^2}\cdot\frac{u}{v}$

$= c_w \cdot \frac{v^2\left(1-\frac{u}{v}\right)^2}{v^2}\cdot\frac{u}{v} = c_w \cdot \left(1-\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{u}{v}$ ==> $c_p(\lambda) = c_w \cdot (1-\lambda)^2 \cdot \lambda$

5.2 $\quad c_p(1/3) = 1{,}3 \cdot (1-1/3)^2 \cdot 1/3 \approx 0{,}1926$; $\quad P_0 = \frac{P_N}{c_p} \approx \frac{1000W}{0{,}1926} \approx 5192\ \text{W}$

$P_0 = \frac{1}{2}\cdot \rho \cdot A \cdot v^3$ ==> $A = \frac{2P_0}{\rho v^3} \approx \frac{2 \cdot 5192\ \text{W}}{1{,}188\ \text{kg/m}^3 \cdot (10\ \text{m/s})^3} \approx 8{,}74\ \text{m}^2$