Weitere Ableitungsregeln

Ausgehen muss man immer von der Definition der Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(die Ableitung ist ein Differenzialquotient, d. h. der Grenzwert eines Differenzenquotienten; graphisch: die Ableitung ist die Steigung der Tangente, d. h. der Grenzwert der Sekantensteigungen).

Im Folgenden soll eine Regel hergeleitet werden, wie man einen Quotienten von Funktionen, also

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

ableitet. Dass die Ableitung ***nicht*** einfach

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

ist, sieht man, wenn man sich als Beispiel u(x) = x und v(x) = 1 anschaut:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x}{1} = x\text{, also } f'(x) = 1;$$

$$\textbf{\textit{aber:}}\ u'(x) = 1,\ v'(x) = 0\text{, also } \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{1}{0}\ !$$

Die Herleitung erfolgt in mehreren Schritten: $\frac{u(x)}{v(x)}$ kann als Produkt von *u(x)* und $\frac{1}{v(x)}$ geschrieben werden; also werden zunächst Ableitungsregeln für den Kehrwert einer Funktion und für das Produkt zweier Funktionen hergeleitet.

<u>a) Ableitung der „Kehrfunktion“</u> (nicht Umkehrfunktion!)

Nach Definition der Ableitungsfunktion (s. o.) gilt:

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{v(x+h)} - \frac{1}{v(x)}}{h}$$

Diesen Ausdruck muss man nun so weit zusammenfassen, bis man ihn direkt berechnen kann. Die beiden Brüche im Zähler bringt man dafür zunächst auf den Hauptnenner:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{v(x) - v(x+h)}{v(x+h)\ v(x)}}{h}$$

Nach den Regeln der Bruchrechnung kann man dies folgendermaßen umschreiben:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{v(x+h)\ v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Nach den Grenzwertsätzen kann man dieses Produkt aufteilen:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{v(x+h)\ v(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Den ersten Grenzwert kann man direkt berechnen (v ist differenzierbar und damit stetig); der zweite Grenzwert ist (nach Definition!) die Ableitung von v:

$$= \frac{-1}{v(x)\ v(x)} \cdot v'(x)$$

Damit ergibt sich also:

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$$

b) Ableitung von Produkten

Nach Definition der Ableitungsfunktion (s. v.) gilt:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, gibt es einen Standard-Trick (s. Buch!); hier wird ein (hoffentlich) ein wenig anschaulicherer Weg gewählt: Für $h \approx 0$ gilt:

$$f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$$

(anschaulich: man kann eine Funktion in der Nähe einer Stelle x durch ihre Tangente annähern). Damit folgt:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x)+h\cdot f'(x)\right)\cdot\left(g(x)+h\cdot g'(x)\right) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Nach auflösen der Klammern und zusammenfassen bleibt:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f'(x)\cdot g(x) + h\cdot f(x)\cdot g'(x) + h^2}{h}$$

Jetzt kann man im Zähler h ausklammern und dann kürzen:

$$= \lim_{h\to 0}\left(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) + h\right)$$

Hier kann man nun den Grenzwert direkt berechnen; es ergibt sich also:

$$\boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$$

(Anschaulich: Die Änderung eines Produkts zweier Faktoren setzt sich zusammen aus der Änderung des ersten Faktors, wobei der zweite konstant bleibt, und der Änderung des zweiten Faktors, wobei der erste konstant bleibt.)

c) Ableitung eines Quotieten

Hier wendet man erst die Produktregel, dann die für die Kehrfunktion an:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\cdot\frac{1}{v(x)} + u(x)\cdot\left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right)$$

Bringt man die beiden Brüche auf den Hauptnenner und fasst zusammen, so folgt:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Will man eine zweite Ableitung berechnen, so braucht man nun also die Ableitung von $v^2(x)$ – also die Ableitung einer Verkettung von Funktionen! (oft kann man auch $v^2(x)$ direkt ausrechnen und dann erst ableiten, das ist aber meist weit umständlicher)

d) Ableitung von Verkettungen

Nach Definition gilt: $$\left(u(v(x))\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h}$$

Auch hier gibt es einen Standard-Trick zur Berechnung (s. Buch), aber man kann auch wie in (b) oben statt dessen die Tangenten-Näherung verwenden – hier aber zweimal nacheinander:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(v(x)+h\cdot v'(x)) - u(v(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(v(x)+k) - u(v(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(v(x)) + k\cdot u'(v(x)) - u(v(x))}{h}$$

Hier wurde zur Abkürzung *k = h · v'(x)* gesetzt und benutzt, dass für $h \to 0$ dann auch $k \to 0$ gilt. Setzt man diese Abkürzung wieder ein und vereinfacht, so bleibt übrig:

$$= \lim_{k\to 0}\frac{h\cdot v'(x)\cdot u'(v(x))}{h}$$

h kann man nun kürzen und den Limes dann einfach weglassen, weil kein h mehr vorkommt; also folgt:

$\boxed{\left(u(v(x))\right)' = u'(v(x))\cdot v'(x)}$ (Merkregel: „äußere mal innere Ableitung“)

Dies kann man sich mit Differenzialquotienten auch folgendermaßen leicht merken: $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$.