Weitere Ableitungsregeln

Ausgehen muss man immer von der Definition der Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(die Ableitung ist ein Differenzialquotient, d. h. der Grenzwert eines Differenzenquotienten; graphisch: die Ableitung ist die Steigung der Tangente, d. h. der Grenzwert der Sekantensteigungen).

a) Ableitung von Verkettungen

Nach der obigen Definition der Ableitung gilt: $(u(v(x)))' = \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h}$

Es gibt hier einen Standard-Trick zur Berechnung (s. Buch), hier wird aber ein (hoffentlich) ein wenig anschaulicherer Weg gewählt: Für $h \approx 0$ gilt:

$$v(x+h) \approx v(x) + h \cdot v'(x)$$

(anschaulich: man kann eine Funktion in der Nähe einer Stelle x durch ihre Tangente annähern).

Damit ist der gesuchte Grenzwert zunächst

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x) + h \cdot v'(x)) - u(v(x))}{h}$$

Schreibe nun zur Abkürzung $k = h \cdot v'(x)$ und benutze, dass für $h \to 0$dann auch $k \to 0$ gilt; wir haben also:

$$f'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{u(v(x) + k) - u(v(x))}{h}$$

Nun kann man auch die Funktion u durch ihre Tangente annähern:

$$f'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{u(v(x)) + k \cdot u'(v(x)) - u(v(x))}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k \cdot u'(v(x))}{h}$$

Setzt man diese Abkürzung wieder ein, so hat man

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot v'(x) \cdot u'(v(x))}{h}$$

h kann man nun kürzen und den Limes dann einfach weglassen, weil kein h mehr vorkommt; also folgt:

$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Merkregel: „äußere mal innere Ableitung“)

Dies kann man sich mit Differenzialquotienten auch folgendermaßen leicht merken: $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

b) Ableitung von Produkten

Nach Definition der Ableitungsfunktion (s. o.) gilt:

$$(u(x) \cdot v(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, gibt es einen Standard-Trick (s. Buch!); hier wird statt dessen wieder der Weg von oben gewählt: wir nähern u(x) und v(x) durch ihre Tangenten an. Damit folgt:

$$(u(x) \cdot v(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{(u(x) + h \cdot u'(x)) \cdot (v(x) + h \cdot v'(x)) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Nach Auflösen der Klammern und zusammenfassen bleibt:

$$(u(x) \cdot v(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot u'(x) \cdot v(x) + h \cdot u(x) \cdot v'(x) + h^2 \cdot u'(x) \cdot v'(x)}{h}$$

Jetzt kann man im Zähler h ausklammern und dann kürzen:

$$(u(x) \cdot v(x))' = \lim_{h \to 0} (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + h \cdot u'(x) \cdot v'(x))$$

Hier kann man nun den Grenzwert direkt berechnen; es bleibt:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

(Anschaulich: Die Änderung eines Produkts zweier Faktoren setzt sich zusammen aus der Änderung des ersten Faktors, wobei der zweite konstant bleibt, und der Änderung des zweiten Faktors, wobei der erste konstant bleibt.)