# Wiederholung: Grenzwerte, Definitionslücken, Asymptoten, Ableitung

1) Grenzwerte im Unendlichen *(alles folgende gilt entsprechend auch für $-\infty$)*
Anschaulich: Die Funktion f hat den Grenzwert g im Unendlichen, wenn sich die Funktionswerte für immer größer werdendes x immer mehr dem Wert g annähern.

Mathematisch exakt: Die Funktion hat den Grenzwert g im Unendlichen, wenn man für jede Zahl $\varepsilon > 0$ (= y-Abstand) eine Zahl $x_S$ („Schranke") finden kann, sodass $|f(x) - g| < \varepsilon$ gilt für alle $x > x_S$.

Man sagt dann auch, die Funktion f ist konvergent bzw. sie konvergiert gegen g, und schreibt

$$f(x) \to g \text{ für } x \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = g.$$

Existiert kein Grenzwert, so nennt man die Funktion divergent. Dabei ist zu unterscheiden:
a) bestimmte Divergenz: Die Funktionswerte werden unbeschränkt immer größer (oder immer kleiner), wenn x immer größer wird. Man schreibt $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ oder, obwohl es ja eigentlich gar keinen Grenzwert gibt, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (das nennt man auch einen uneigentlichen Grenzwert).
b) unbestimmte Divergenz: Es existiert kein Grenzwert, noch nicht einmal ein uneigentlicher. Das kann z. B. passieren, wenn die Funktion oszilliert, z. B. $f(x) = \sin(x)$.

2) Grenzwerte an einer Stelle und Stetigkeit
Anschaulich: Die Funktion f hat den Grenzwert g an der Stelle $x_0$, wenn sich die Funktionswerte immer mehr dem Wert g annähern, falls x sich immer mehr an $x_0$ annähert.

Mathematisch exakt: Die Funktion hat den Grenzwert g an der Stelle $x_0$, wenn man für jede Zahl $\varepsilon > 0$ (= y-Abstand) eine Zahl $\delta > 0$ (= x-Abstand) finden kann, sodass $|f(x) - g| < \varepsilon$ gilt für alle $|x - x_0| < \delta$.

Die Bezeichnungen konvergent, divergent usw. gelten entsprechend wie bei Grenzwerten im Unendlichen.

Oft muss man unterscheiden, ob man sich „von links" oder „von rechts" an eine Stelle annähert. Bei den entsprechenden links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten schreibt man $x \to x_0^-$ bzw. $x \to x_0^+$.

Eine Funktion heißt stetig an einer Stelle $x_0$, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist; an Nahtstellen muss man dabei den links- und den rechtsseitigen Grenzwert getrennt berechnen!

3) Sätze über stetige Funktionen
Sei f im Intervall [a; b] stetig, d. h. stetig an allen Stellen $x_0 \in [a; b]$. Dann gilt:

- Nullstellensatz: Haben f(a) und f(b) unterschiedliche Vorzeichen, so hat f in [a; b] mindestens eine Nullstelle.
- Zwischenwertsatz: Ist $f(a) \neq f(b)$, dann gibt es für alle c zwischen f(a) und f(b) ein $x_c \in [a; b]$, sodass $f(x_c) = c$ ist.
- Extremwertsatz: f hat in [a; b] ein Minimum und ein Maximum.

## 4) Grenzwertsätze

Existieren die Grenzwerte lim f(x) und lim g(x) im Unendlichen bzw. an derselben Stelle, so gilt
I. lim (f(x) + g(x)) = lim f(x) + lim g(x)
II. lim (f(x) – g(x)) = lim f(x) – lim g(x)
III. lim (f(x) · g(x)) = lim f(x) · lim g(x)
IV. lim ( f(x) / g(x) ) = lim f(x) / lim g(x) *(für lim g(x) ≠ 0!)*
V. Ist f stetig, so ist lim f(g(x)) = f(lim g(x)).

## 5) grundlegende Grenzwerte und Tipps zur Berechnung

- Hat der Nenner einer (vollständig gekürzten!) gebrochenrationalen Funktion eine Nullstelle, so divergiert die Funktion dort.
- Der Grenzwert einer echt gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen ist immer null; unecht gebrochenrationale Funktionen zerlegt man erst mit Polynomdivision.
- $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
  *(mathematisch unrichtig, aber leicht zu merken: $e^\infty = \infty$; $e^{-\infty} = 0$)*
- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$; $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ *(ln $\infty = \infty$; ln 0 $= -\infty$)*

*Im Folgenden alles mathematisch unrichtig formuliert!*

- $\infty \pm c = \infty$ für alle $c \in \mathbb{R}$; $\infty + \infty = \infty$
- $c \cdot \infty = +\infty$ für c > 0, $= -\infty$ für c < 0; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\frac{c}{\infty} = 0$
- Vorsicht: $\frac{c}{0}$ und $\frac{\infty}{0}$ kann $+\infty$ oder $-\infty$ sein! genauer untersuchen! (links- und rechtsseitige Grenzwerte)
- $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$ sind nicht definiert

## 6) Arten von Definitionslücken und Asymptoten

Eine Definitionslücke $x_0$ heißt...

- ... (stetig) (be)hebbar, wenn f(x) für $x \to x_0$ konvergiert
- ... Polstelle der Ordnung n, wenn f(x) für $x \to x_0$ bestimmt divergiert, aber ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(x - x_0)^n \cdot f(x)$ konvergiert (wobei n kleinstmöglich gewählt wird)
- es gibt auch noch andere Arten von Definitionslücken, z. B. Sprungstellen (Beispiel: f(x) = |x|/x) oder sogenannte „wesentliche Singularitäten" (Beispiel: $f(x) = e^{1/x^2}$)

Ist die Ordnung einer Polstelle gerade bzw. ungerade, so ist es eine Polstelle ohne bzw. mit Vorzeichenwechsel.

Asymptoten:

- Divergiert f(x) bestimmt für $x \to x_0$, so hat $G_f$ die senkrechte Asymptote $x = x_0$.
- Konvergiert f(x) für $x \to \pm\infty$ gegen $y_0$, so hat $G_f$ die waagrechte Asymptote $y = y_0$.
- Gibt es eine Funktion g, sodass f(x) – g(x) für $x \to \pm\infty$ gegen 0 konvergiert, so ist $G_g$ eine Asymptotenkurve für $G_f$; ist speziell g linear, so hat $G_f$ eine schräge Asymptote.

## 7) Ableitung

Definition: Existiert für eine Funktion f an einer Stelle $x_0$ der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so nennt man ihn die Ableitung von f bei $x_0$ und schreibt dafür $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$. (Hängt die Funktion von der Zeit ab, z. B. x(t), so schreibt man $\dot{x}(t)$ ). Die Funktion heißt dann differenzierbar bei $x_0$. Die Funktion f ', die jedem x die Ableitung bei x zuordnet, heißt Ableitungsfunktion (meist aber auch nur „Ableitung" genannt).

(D. h. die Ableitung ist der Grenzwert der Sekantensteigung, also die Tangentensteigung.)

Ableitungen der Grundfunktionen:
1) $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c' = 0$ für $c \in \mathbb{R}$
2) $(e^x)' = e^x$
3) $(\sin x)' = \cos x$

Ableitungsregeln:
- Summenregel: $(f + g)' = f' + g'$
  speziell: $(f + c)' = f' + 0 = f'$ (konstante Summanden fallen weg)
- Produktregel: $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$
  speziell: $(c\,f)' = 0\,f + c\,f' = c\,f'$ (konstante Faktoren bleiben stehen)
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$ *(„NAZZAN")*
- Kettenregel: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
  *(„äußere mal innere Ableitung" / „nachdifferenzieren")*