Wiederholung: Grenzwerte, Definitionslücken, Asymptoten, Ableitung

1) Grenzwerte im Unendlichen
Wenn man x-Werte betrachtet, die unbegrenzt immer größer werden (10, 100, 1000, ...), so sagt man, „x geht gegen unendlich“ und schreibt kurz dafür $x \longrightarrow \infty$. Entsprechend bedeutet $x \longrightarrow -\infty$, dass x unbegrenzt immer kleiner wird (–10, –100, –1000, ...).

Wenn sich die Funktionswerte f(x) einer Funktion für $x \longrightarrow \infty$ immer mehr einem Wert g annähern, so sagt man, g ist der **Grenzwert** von f und schreibt

$$f(x) \longrightarrow g \text{ für } x \longrightarrow \infty \quad (\text{„f von x geht gegen g für x gegen unendlich"})$$

oder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \quad (\text{„Limes f von x für x gegen unendlich ist g"})$$

Völlig entsprechend ist der Grenzwert für $x \longrightarrow -\infty$ definiert. Man sagt dann auch, dass f gegen g **konvergiert** bzw. **konvergent** ist.

Existiert kein Grenzwert, so nennt man die Funktion **divergent.** Dabei ist zu unterscheiden:
a) **bestimmte Divergenz**: Die Funktionswerte werden unbeschränkt immer größer (oder immer kleiner), wenn x immer größer wird. Man schreibt $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ oder, obwohl es ja eigentlich gar keinen Grenzwert gibt, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (das nennt man auch einen **uneigentlichen Grenzwert**).
b) **unbestimmte Divergenz**: Es existiert kein Grenzwert, noch nicht einmal ein uneigentlicher. Das kann z. B. passieren, wenn die Funktion oszilliert, z. B. f(x) = sin(x).

2) Grenzwerte an einer Stelle und Stetigkeit
Wenn man x-Werte betrachtet, die sich immer mehr einer Stelle x_0 annähern (z. B. nähern sich die Zahlen 1,1; 1,01; 1,001 usw. immer mehr dem Wert 1 an; gleiches gilt für die Zahlen 0,9; 0,99; 0,999 usw.), so sagt man, „x geht gegen x_0" und schreibt kurz dafür $x \longrightarrow x_0$.

Die Bezeichnungen Grenzwert, konvergent, divergent usw. gelten dann entsprechend wie bei Grenzwerten im Unendlichen.

Oft muss man unterscheiden, ob man sich „von links" oder „von rechts" an eine Stelle annähert (im Beispiel oben: die Zahlen 0,9; 0,99; 0,999 usw. nähern sich von links an 1; die Zahlen 1,1; 1,01; 1,001 dagegen von rechts). Bei den entsprechenden **links**- bzw. **rechtseitigen** Grenzwerten schreibt man $x \to x_0^-$ bzw. $x \to x_0^+$.

Eine Funktion heißt **stetig** an einer Stelle x_0, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist; an Nahtstellen muss man dabei den links- und den rechtsseitigen Grenzwert getrennt berechnen!

3) Sätze über stetige Funktionen
Sei f im Intervall [a; b] stetig, d. h. stetig an allen Stellen $x_0 \in [a; b]$. Dann gilt:

- Nullstellensatz: Haben f(a) und f(b) unterschiedliche Vorzeichen, so hat f in [a; b] mindestens eine Nullstelle.
- Zwischenwertsatz: Ist $f(a) \neq f(b)$, dann gibt es für alle c zwischen f(a) und f(b) ein $x_c \in [a; b]$, sodass $f(x_c) = c$ ist.
- Extremwertsatz: f hat in [a; b] ein Minimum und ein Maximum.

4) grundlegende Grenzwerte und Tipps zur Berechnung

- Hat der Nenner einer (vollständig gekürzten!) gebrochenrationalen Funktion eine Nullstelle, so divergiert die Funktion dort.
- Der Grenzwert einer echt gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen ist immer null; unecht gebrochenrationale Funktionen zerlegt man erst mit Polynomdivision.
- $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
  (mathematisch unrichtig, aber leicht zu merken: $e^{\infty} = \infty$*;* $e^{-\infty} = 0$*)*

Im Folgenden alles mathematisch unrichtig formuliert!

- $\infty \pm c = \infty$ für alle $c \in \mathbb{R}$; $\infty + \infty = \infty$
- $c \cdot \infty = +\infty$ für $c > 0$, $= -\infty$ für $c < 0$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\frac{c}{\infty} = 0$
- Vorsicht: $\frac{c}{0}$ und $\frac{\infty}{0}$ kann $+\infty$ oder $-\infty$ sein! genauer untersuchen! (links- und rechtsseitige Grenzwerte)
- $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ sind nicht definiert; hier hilft z. B. Ausklammern und Kürzen, aber auch die Regel „e hoch gewinnt gegen jede Potenz‘‘

  z.B.: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$

  (allgemein: Zählergrad = Nennergrad ➔ Grenzwert = Quotient der Leitkoeffizienten)

  2) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = „\infty \cdot 0" = 0$ („e gewinnt‘‘)
- $\infty - \infty$ ist ebenfalls nicht definiert; hier hilft oft Ausklammern
  z. B.: $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - x^2) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2(x-1) = „\infty \cdot \infty" = \infty$

5) Arten von Definitionslücken und Asymptoten

Eine Definitionslücke x_0 heißt...

- ... **(stetig) (be)hebbar**, wenn f(x) für $x \to x_0$ konvergiert
- ... **Polstelle** der Ordnung n, wenn f(x) für $x \to x_0$ bestimmt divergiert, aber ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(x - x_0)^n \cdot f(x)$ konvergiert (wobei n kleinstmöglich gewählt wird)
- es gibt auch noch andere Arten von Definitionslücken, z. B. Sprungstellen (Beispiel: $f(x) = |x|/x$) oder sogenannte „wesentliche Singularitäten" (Beispiel: $f(x) = e^{1/x^2}$)

Ist die Ordnung einer Polstelle gerade bzw. ungerade, so ist es eine Polstelle ohne bzw. mit VZW.

Asymptoten:

- Divergiert f(x) bestimmt für $x \to x_0$, so hat G_f die **senkrechte Asymptote** $x = x_0$.
- Konvergiert f(x) für $x \to \pm\infty$ gegen y_0, so hat G_f die **waagrechte Asymptote** $y = y_0$.
- Gibt es eine Funktion g, sodass $f(x) - g(x)$ für $x \to \pm\infty$ gegen 0 konvergiert, so ist G_g eine **Asymptotenkurve** für G_f; ist speziell g linear, so hat G_f eine **schräge Asymptote**.

6) Ableitung

Definition: Existiert für eine Funktion f an einer Stelle x_0 der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so nennt man ihn die **Ableitung** von f bei x_0 und schreibt dafür $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$. (Hängt die Funktion von der Zeit ab, z. B. x(t), so schreibt man $\dot{x}(t)$). Die Funktion heißt dann **differenzierbar** bei x_0. Die Funktion f ', die jedem x die Ableitung bei x zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion** (meist aber auch nur „Ableitung" genannt).

D. h. die Ableitung ist der Grenzwert der Sekanten-Steigung, also die Tangenten-**Steigung**. Anschaulich gibt die Ableitung einer Größe auch an, wie schnell sich diese Größe lokal bzw. momentan ändert. Die zweite Ableitung einer Funktion gibt also an, wie schnell sich die Steigung ändert und beschreibt deshalb die **Krümmung** von G_f.

Ableitungen der Grundfunktionen:
1) $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c' = 0$ für $c \in \mathbb{R}$
2) $(e^x)' = e^x$
3) $(\sin(x))' = \cos(x)$; $(\cos(x))' = -\sin(x)$

Ableitungsregeln:
- Summenregel: $(f + g)' = f' + g'$
  speziell: $(f + c)' = f' + 0 = f'$ (konstante Summanden fallen weg)
- Produktregel: $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$
  speziell: $(c\,f)' = 0\,f + c\,f' = c\,f'$ (konstante Faktoren bleiben stehen)
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$ *(„NAZZAN")*
- Kettenregel: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
  („äußere mal innere Ableitung" / „nachdifferenzieren")