Wiederholung: Grenzwerte, Ableitung

1) Grenzwerte im Unendlichen

Wenn man x-Werte betrachtet, die unbegrenzt immer größer werden (10, 100, 1000, ...), so sagt man, „x geht gegen unendlich“ und schreibt kurz dafür $x \longrightarrow \infty$. Entsprechend bedeutet $x \longrightarrow -\infty$, dass x unbegrenzt immer kleiner wird (–10, –100, –1000, ...).

Wenn sich die Funktionswerte f(x) einer Funktion für $x \longrightarrow \infty$ immer mehr einem Wert g annähern, so sagt man, g ist der **Grenzwert** von f und schreibt

$$f(x) \longrightarrow g \text{ für } x \longrightarrow \infty$$ („f von x geht gegen g für x gegen unendlich")

oder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g$$ („Limes f von x für x gegen unendlich ist g")

Völlig entsprechend ist der Grenzwert für $x \longrightarrow -\infty$ definiert. Man sagt dann auch, dass f gegen g **konvergiert** bzw. **konvergent** ist.

Existiert kein Grenzwert, so nennt man die Funktion **divergent.**

2) Grenzwerte an einer Stelle und Stetigkeit

Wenn man x-Werte betrachtet, die sich immer mehr einer Stelle x_0 annähern (z. B. nähern sich die Zahlen 1,1; 1,01; 1,001 usw. immer mehr dem Wert 1 an; gleiches gilt für die Zahlen 0,9; 0,99; 0,999 usw.), so sagt man, „x geht gegen x_0" und schreibt kurz dafür $x \longrightarrow x_0$.

Die Bezeichnungen Grenzwert, konvergent, divergent usw. gelten dann entsprechend wie bei Grenzwerten im Unendlichen.

Oft muss man unterscheiden, ob man sich „von links" oder „von rechts" an eine Stelle annähert (im Beispiel oben: die Zahlen 0,9; 0,99; 0,999 usw. nähern sich von links an 1; die Zahlen 1,1; 1,01; 1,001 dagegen von rechts). Bei den entsprechenden **links**- bzw. **rechtseitigen** Grenzwerten schreibt man $x \to x_0^-$ bzw. $x \to x_0^+$.

Eine Funktion heißt **stetig** an einer Stelle x_0, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist; anschaulich bedeutet das, dass der Graph dort keinen Sprung macht, man ihn also mit dem Bleistift ohne Absetzen durchzeichnen kann.

3) grundlegende Grenzwerte bei ganzrationalen Funktionen

	LK > 0	LK < 0
Grad gerade	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$
Grad ungerade	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

4) Ableitung

Definition: Existiert für eine Funktion f an einer Stelle x_0 der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so nennt man ihn die **Ableitung** von f bei x_0 und schreibt dafür $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$. (Hängt die Funktion von der Zeit ab, z. B. x(t), so schreibt man $\dot{x}(t)$). Die Funktion heißt dann **differenzierbar** bei x_0. Die Funktion f ', die jedem x die Ableitung bei x zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion** (meist aber auch nur „Ableitung" genannt).

D. h. die Ableitung ist der Grenzwert der Sekanten-Steigung, also die Tangenten-**Steigung**. Anschaulich gibt die Ableitung einer Größe auch an, wie schnell sich diese Größe lokal bzw. momentan ändert. Die zweite Ableitung einer Funktion gibt also an, wie schnell sich die Steigung ändert und beschreibt deshalb die **Krümmung** von G_f.

Ableitungen der Potenzfunktionen: $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $c' = 0$ für $c \in \mathbb{R}$

Ableitungsregeln:

- Summenregel: $(f + g)' = f' + g'$
  speziell: $(f + c)' = f' + 0 = f'$ (konstante Summanden fallen weg)
- Produktregel: $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$
  speziell: $(c\,f)' = 0\,f + c\,f' = c\,f'$ (konstante Faktoren bleiben stehen)
- Kettenregel: $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
  („äußere mal innere Ableitung" / „nachdifferenzieren")