Wurzelfunktionen und -gleichungen

a) Begriff und Graphen

Definition: Die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$), also

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \text{ mit } x \in \mathbb{R}_0^+,$$

heißen Wurzelfunktionen. Meist spricht man bei einer Verkettung der Wurzelfunktionen mit anderen Funktionen auch einfach von Wurzelfunktionen.

Ihre Graphen sind liegende Parabeläste.

Anmerkung: Ist n ungerade, so ist eigentlich auch $x \in \mathbb{R}$ möglich! Da aber in den meisten Büchern Wurzeln so definiert sind, dass man sie nur aus nicht-negativen Zahlen ziehen kann und sich dabei nur eine nicht-negative Zahl ergibt, muss man eigentlich dann ausführlicher schreiben:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x} & x < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(x) \cdot \sqrt[n]{|x|}$$

b) Definitionsmenge

Wurzelfunktionen sind für alle x definiert, für welche das Argument der Wurzel (der Radikand) nicht negativ ist.

Beispiel: $f(x) = 1 - \sqrt{2 - e^x}$

$2 - e^x \geq 0 \Longrightarrow e^x \leq 2 \Longrightarrow x \leq \ln 2$ *(da ln streng monoton zunehmend ist!)*

$\Longrightarrow D_f =]-\infty; \ln 2]$

Wenn mehrere Wurzeln auftreten, so ergibt sich die gesamte Definitionsmenge der Funktion als Schnittmenge der Definitionsmengen der einzelnen Wurzeln.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

$D_1 = [0; \infty[$ und $D_2 =]-\infty; 1]$ $\Longrightarrow$ $D_f = [0; 1]$

c) (Quadrat-)Wurzelgleichungen,

Gleichungen, in denen die Variable unter einer Quadratwurzel steht, löst man, indem man zunächst (wenn möglich) die Wurzel isoliert und quadriert (binomische Formel beachten!). Kommen mehrere Wurzeln vor, so muss man dies i. A. mehrmals durchführen.

Vorsicht: Quadrieren ändert i. A. die Lösungsmenge! ➔ am Schluss: Probe!

Beispiel: $-2 + \sqrt{x+2} = -\sqrt{x}$

$\Longrightarrow 4 - 4\sqrt{x+2} + (x + 2) = x$

$\Longrightarrow -4\sqrt{x+2} = -6$

$\Longrightarrow 16(x + 2) = 36$

$\Longrightarrow x = 0{,}25$

Probe: $-2 + \sqrt{0{,}25 + 2} = -\sqrt{0{,}25}$ $\Longrightarrow -0{,}5 = -0{,}5$ ✓