Umkehrfunktionen

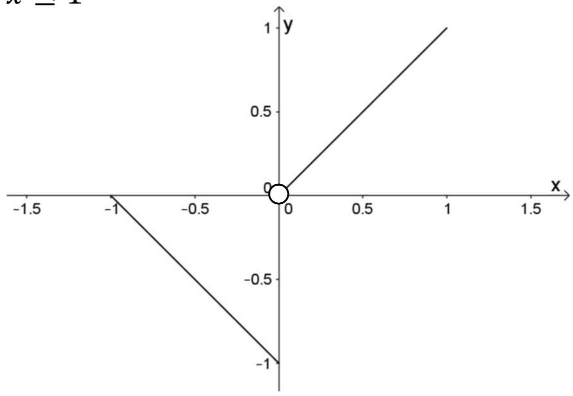
Definition: Ist für eine Funktion f: x $\mapsto$ y die umgekehrte Zuordnung y $\mapsto$ x ebenfalls eindeutig, also eine Funktion, so nennt man sie die Umkehrfunktion zu f und bezeichnet sie mit f^{-1}.

Eine Funktion ist also genau dann umkehrbar, wenn ihr Graph mit jeder Parallelen zur x-Achse höchstens einen Schnittpunkt hat.

Ist eine Funktion in ganz D smf oder in ganz D sms, so ist sie umkehrbar.

(Beachte: Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig! Z. B. ist die Funktion

f: x $\longmapsto \begin{cases} -x-1 \text{ für } -1 \leq x \leq 0 \\ x \text{ für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ mit dem folgenden Graph



smf in [−1; 0] und sms in [0; 1], also ***nicht*** in ganz D smf oder in ganz D sms, aber trotzdem in ganz D = [−1; 1] umkehrbar!)

Sätze:
1) $D(f^{-1}) = W(f)$ und $D(f) = W(f^{-1})$.
2) Man erhält $G_{f^{-1}}$ durch Spiegeln von G_f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.
3) Es gilt immer: $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Berechnen der Umkehrfunktion:
1) Funktionsgleichung y = f(x) hinschreiben.
2) Nach x auflösen, dabei D beachten!
3) wenn Ergebnis eindeutig: x und y vertauschen; dann hat man $f^{-1}(x)$

Speziell: Lineare Funktionen

Ist f eine lineare Funktion mit $m \neq 0$, so ist gibt es immer eine Umkehrfunktion, und diese ist ebenfalls linear. Ihre Steigung ist $\frac{1}{m} = m^{-1}$.