Zusammenfassung: Lineare (Un-)Abhängigkeit und Basis

1) Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ heißen linear abhängig, wenn man (mindestens) einen von ihnen als Linearkombination der anderen schreiben kann; ansonsten heißen sie linear unabhängig. Äquivalent dazu ist: Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ heißen linear unabhängig, wenn die Vektorgleichung

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} + \cdots = \vec{0}$$

nur die „triviale Lösung" $\lambda = \mu = \nu = \cdots = 0$ hat; ansonsten (wenn diese Gleichung also unendlich viele Lösungen hat) heißen sie linear abhängig.

2) Geht es um zwei Vektoren, dann sagt man statt „linear abhängig" auch kollinear (anschaulich: die beiden Vektoren haben dann Repräsentanten, die „auf derselben Linie" liegen, d. h. sie sind parallel). In diesem Fall ist es meist einfacher, die erste Form der Definition zu verwenden: Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig (also kollinear, also parallel), wenn man einen von ihnen als Linearkombination des anderen schreiben kann, d. h. wenn einer der beiden ein Vielfaches des anderen ist.

3) Geht es um drei Vektoren, dann sagt man statt „linear abhängig" auch komplanar (anschaulich: die drei Vektoren haben dann Repräsentanten, die „in derselben Ebene" *(englisch: plane)* liegen). In diesem Fall ist es meist einfacher, die zweite Form der Definition zu verwenden: Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig (also *nicht* komplanar!), wenn die Vektorgleichung

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$$

nur die „triviale Lösung" $\lambda = \mu = \nu = 0$ hat; wenn diese Gleichung dagegen unendlich viele Lösungen hat, dann sind die Vektoren linear abhängig (also komplanar).

4) Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots \in \mathbb{R}^n$ heißen eine Basis des $\mathbb{R}^n$, wenn man jeden Vektor des $\mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination dieser Vektoren schreiben kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn (1) es genau n Vektoren sind und (2) diese linear unabhängig sind.