Wiederholung: Kurvendiskussion

1) Monotonie

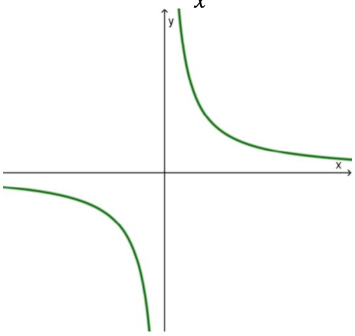
Definition: Eine Funktion heißt in einem Intervall I streng/echt monoton $\left\{\begin{matrix}\text{zunehmend}\\\text{abnehmend}\end{matrix}\right\}$, wenn für alle x_1, x_2 $\in$ I mit $x_2>x_1$ gilt, dass $\left\{\begin{matrix}f(x_2)>f(x_1)\\f(x_2)<f(x_1)\end{matrix}\right\}$ ist. Der Graph heißt dann streng/echt monoton $\left\{\begin{matrix}\text{steigend}\\\text{fallend}\end{matrix}\right\}$.

Bestimmen der Monotonieintervalle:

- f nicht differenzierbar: Ungleichungen lösen
- f stetig in [a;b] und differenzierbar in]a;b[: *(in der FS steht das zu ungenau!)*
  $\left\{\begin{matrix}f'(x)>0\\f'(x)<0\end{matrix}\right\}$ in]a;b[➔ G_f ist streng monoton $\left\{\begin{matrix}\text{steigend}\\\text{fallend}\end{matrix}\right\}$ in [a;b]

Vorsicht bei abschnittsweise definierten Funktionen / Definitionslücken von f oder f '!

Beispiel $f(x)=\frac{1}{x}$:



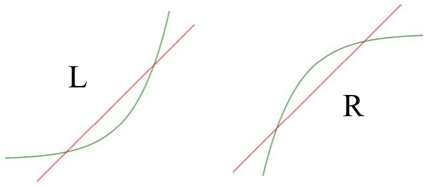
$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f'(x) < 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

aber: G_f ist ***nicht*** streng monoton fallend in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, sondern nur getrennt in $\mathbb{R}^-$ und $\mathbb{R}^+$!

2) Krümmung

Definition: Eine Funktion heißt in einem Intervall I $\left\{\begin{matrix}\text{konvex}\\\text{konkav}\end{matrix}\right\}$, wenn für alle $x_1 \neq x_2 \in$ I und alle h $\in$ [0;1] gilt, dass $\left\{\begin{matrix}f((1\text{-}h)\,x_1 + h\,x_2) \le (1\text{-}h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)\\f((1\text{-}h)\,x_1 + h\,x_2) \ge (1\text{-}h)\,f(x_1) + h\,f(x_2)\end{matrix}\right\}$ ist, d. h. alle Sekanten verlaufen $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\\text{unterhalb}\end{matrix}\right\}$ ihres Graphen. Der Graph heißt dann $\left\{\begin{matrix}\text{linksgekrümmt}\\\text{rechtsgekrümmt}\end{matrix}\right\}$.

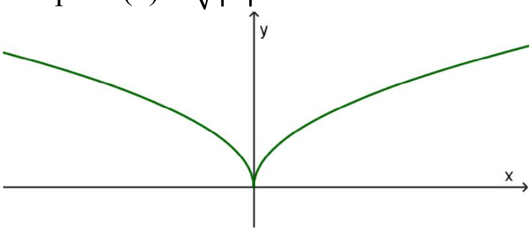


Bestimmen der Krümmungsintervalle:

- f nicht zweimal differenzierbar: Ungleichungen lösen
- f stetig in [a;b] und zweimal differenzierbar in]a;b[: *(in der FS steht das zu ungenau!)*
  $\left\{\begin{matrix}f''(x)>0\\f''(x)<0\end{matrix}\right\}$ in]a;b[➔ G_f ist $\left\{\begin{matrix}\text{linksgekrümmt}\\\text{rechtsgekrümmt}\end{matrix}\right\}$ in [a;b]

Vorsicht bei abschnittsweise definierten Funktionen / Definitionslücken von f, f ' oder f ''!

Beispiel $f(x)=\sqrt{|x|}$:



$D_f = \mathbb{R}$; $D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f''(x) < 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

aber: G_f ist ***nicht*** rechtsgekrümmt in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, sondern nur getrennt in $\mathbb{R}^-_0$ und $\mathbb{R}^+_0$!

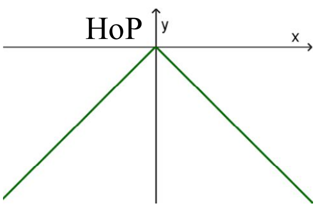
3) Extrem- und Terrassenpunkte

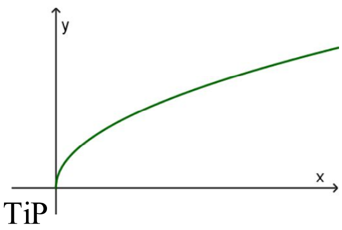
Definitionen:
a) Eine Stelle x_0 heißt (eigentliche) relative Maximalstelle bzw. Minimalstelle einer Funktion f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in]x_0-\varepsilon; x_0[\cup]x_0; x_0+\varepsilon[$ („Umgebung") die Ungleichungen $f(x)<f(x_0)$ bzw. $f(x)>f(x_0)$ gelten. Der zugehörige Funktionswert heißt dann relatives Maximum bzw. Minimum von f, der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt relativer Hoch- HoP bzw. Tiefpunkt TiP. Maximal- und Minimalstellen zusammen genommen nennt man Extremalstellen, den jeweils zugehörigen Funktionswert ein Extremum, die zugehörigen Punkte Extrempunkte ExP. Statt „relativ" sagt man hier auch „lokal".
b) Extrema an den Rändern der Definitionsmenge (wenn also die Ungleichungen nur in $]x_0; x_0+\varepsilon[$ bzw. nur in $]x_0-\varepsilon; x_0[$ gelten) heißen Randextrema.
c) Eine Stelle, bei der $f'(x_0) = 0$ ist, obwohl sie keine Extremstelle ist, heißt Terrassen- (oder Sattel-) stelle, der Punkt entsprechend Terrassen- (oder Sattel-)Punkt TeP.

Bestimmen der Extrem- und Terrassenpunkte:

- Monotonieintervalle bestimmen (s. o.); insbesondere Extrema am Rand oder an Nahtstellen erhält man *nur* damit!
- f differenzierbar ==> für einen relativen ExP und für einen TeP jeweils notwendig:
  $f' = 0$ (Punkt mit waagrechter Tangente / stationärer Punkt / kritischer Punkt)
- hinreichend und notwendig für relativen ExP: zusätzlich VZW von f';
  hinreichend und notwendig für TeP: zusätzlich kein VZW von f'
- f zweimal differenzierbar:
  hinreichend, aber nicht notwendig für relativen ExP: zusätzlich $f'' \neq 0$; genauer: HoP für $f'' < 0$, TiP für $f'' < 0$
  notwendig, aber nicht hinreichend für TeP: zusätzlich $f'' = 0$

beachte: ExP sind auch an Stellen möglich, wo f nicht differenzierbar ist! Deshalb am besten ***immer*** die Monotonie verwenden! Beispiele $f(x) = -|x|$ und $f(x) = \sqrt{x}$, jeweils bei x = 0 nicht differenzierbar:





Definition: Eine Stelle x_0 heißt absolute Maximalstelle bzw. Minimalstelle einer Funktion f, wenn für alle $x \in D_f$ die Ungleichungen $f(x)<f(x_0)$ bzw. $f(x)>f(x_0)$ gelten. Der zugehörige Funktionswert heißt dann absolutes Maximum bzw. Minimum von f, der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt absoluter Hoch- HoP bzw. Tiefpunkt TiP. Statt „absolut" sagt man hier auch „global".

absolute Extrema bestimmen: relative Extrema und Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge beachten! (Randextrema, Divergenzen, ...); damit auch: Wertemenge!

4) Wende- und Terrassenpunkte

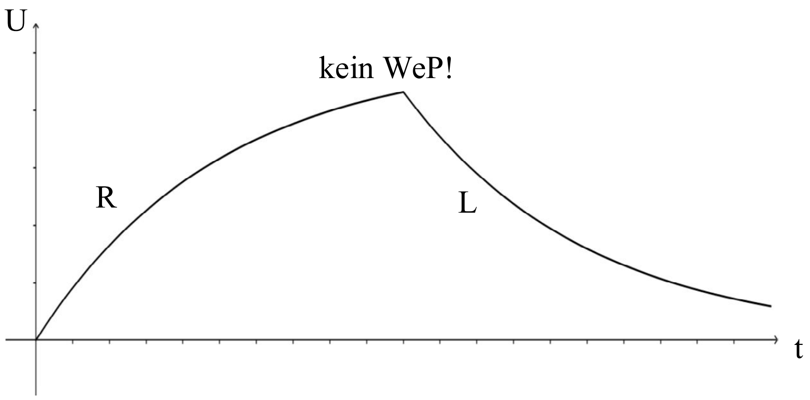
Definition: Eine (eigentliche) relative Extremstelle von f ’, also eine Stelle mit minimaler(m)/ maximaler(m) Steigung (Gefälle), heißt Wendestelle, der entsprechende Punkt heißt Wendepunkt.

Bestimmen der Extrem- und Terrassenpunkte:

- Krümmungsintervalle bestimmen (s.o.); aber: siehe unten!
- f zweimal differenzierbar ==> für einen WeP notwendig: $f'' = 0$ (Flachpunkt)
- hinreichend und notwendig: zusätzlich VZW von f''
- f dreimal differenzierbar ==> hinreichend, aber nicht notwendig: zusätzlich $f''' \neq 0$
- zusätzlich $f' = 0$ ==> TeP

beachte: Jeder WeP ist ein Punkt, bei dem der Graph sein Krümmungsverhalten wechselt. Umgekehrt ist aber nicht jeder Punkt, bei dem der Graph sein Krümmungsverhalten wechselt, auch wirklich ein WeP! WeP sind nur an Stellen möglich, an denen f differenzierbar ist!

Gegenbeispiel: Auf- und Entladen eines Kondensators



aber: f muss nicht unbedingt zweimal differenzierbar sein!
Beispiel: $f(x) = x\cdot|x|$ bei $x = 0$; $f'(x) = 2\cdot|x|$