Wiederholung und Ergänzungen: Integralrechnung

a) Ober- und Untersummen und bestimmte Integrale

Definitionen:
1) Nähert man den Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse durch Rechtecke an, deren Flächeninhalt kleiner oder gleich ist als derjenige zwischen dem Graph und der x-Achse, so spricht man von einer Untersumme; wenn der Flächeninhalt der Rechtecke jeweils größer oder gleich ist, von einer Obersumme.
2) Eine in [a;b] definierte Funktion f heißt integrierbar/integrabel, wenn die Grenzwerte der Ober- und Untersummen (*und auch alle anderen Möglichkeiten*) übereinstimmen. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

und nennt dies das bestimmte Integral von f über [a;b]. a und b heißen die (untere und obere) Integrationsgrenze, f der Integrand und x die Integrationsvariable.

(In vielen Büchern steht, dass diese Definition das „Riemann-Integral" wäre, nach dem deutschen Mathematiker Georg Riemann, der dies angeblich 1868 so definierte. Das ist aber eigentlich falsch: Riemanns Definition war deutlich komplizierter; die Definition hier entspricht weit eher der vereinfachten, aber äquivalenten Version, die der französische Mathematiker Gaston Darboux 1875 gab. Siehe dazu beispielsweise https://www.youtube.com/watch?v=WgUZKeQHlO8.)

Regeln für bestimmte Integrale:

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ *(anschaulich klar!)*
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ *(anschaulich klar!)*
- damit folgt: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
  anschaulich: man geht von rechts nach links, die Rechteckbreiten sind negativ!

b) Integralfunktionen und der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Def.: Ist f integrierbar in [a;b] und sind u,x∈ [a;b], so heißt $F_u(x) := \int_u^x f(t)dt$ eine Integralfunktion von f.
Satz: Ist f in [a;b] stetig und u∈ [a;b], so ist F_u differenzierbar in]a;b[, und es gilt $F_u' = f$.

(Anmerkungen: (1) f muss nicht stetig sein, damit sie integrierbar ist -- F ist aber an Unstetigkeitsstellen von f nicht differenzierbar! (2) Oft hört man, dass Newton und Leibniz die Differenzial- und Integralrechnung erfunden hätten. Das stimmt so nicht – beides gab es prinzipiell schon vor ihnen. Der Verdienst von Newton und Leibniz ist, dass sie erstmals die Wichtigkeit dieses Hauptsatzes erkannten; außerdem führte Leibniz auch die heute gebräuchliche Notation mit dem Integralzeichen und dem dx ein.)

c) Stammfunktionen, unbestimmte Integrale und Berechnung von Integralen

Definition: Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu f, wenn F' = f gilt. Das unbestimmte Integral steht für alle Stammfunktionen von f: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Beachte: Jede Integralfunktion ist also eine Stammfunktion – aber nicht jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion! (Beispiel: f(x) = 2x ➔ $F_u(x) = x^2 - u^2$, also ist z. B. $F(x) = x^2 + 1$ keine Integralfunktion.)

mit den Regeln für bestimmte Integrale folgt:
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx = \int_u^b f(x)dx - \int_u^a f(x)dx = F_u(b) - F_u(a)$ mit u∈ [a;b] beliebig
Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante
➔ $F_u(b) - F_u(a) = F(b) - F(a)$ mit beliebiger Stammfunktion F

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Damit folgt auch für Integralfunktionen:

$$F_u(x) = \int_u^x f(t)dt = F(x) - F(u) \quad \text{(mit einer beliebigen Stammfunktion F)}$$

Integrationsregeln: *für bestimmte und unbestimmte Integrale, und Integralfunktionen!*

- Faktorregel: $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$
- Summenregel: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Integration der Grundfunktionen: *(FS!)*

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
2) $\int e^x dx = e^x + C$
3) $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$; $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$

außerdem: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ *(„lineare Substitution"; FS!)*

z. B.: $\int (2x+3)^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}(2x+3)^5 + C$; $\int e^{-3x} dx = \frac{1}{-3} \cdot e^{-3x} + C$

Beachte: Unecht gebrochenrationale Funktionen (Zählergrad $\geq$ Nennergrad) erst mit Polynomdivision in Asymptotenform bringen! Stammfunktion bisher nur bekannt, wenn der Term von der Form $c\,(ax+b)^n$ mit $n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ist!

Beispiel: $\int \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} dx = \cdots = \int \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = x + \frac{1}{x+1} + C$