Wiederholung: Integralrechnung

a) Ober- und Untersummen und bestimmte Integrale

Definitionen:
1) Nähert man den Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse durch Rechtecke an, deren Flächeninhalt kleiner ist als derjenige zwischen dem Graph und der x-Achse, so spricht man von einer Untersumme; wenn der Flächeninhalt der Rechtecke jeweils größer ist, von einer Obersumme.
2) Eine in [a;b] definierte Funktion f heißt integrierbar/integrabel, wenn die Grenzwerte der Ober- und Untersummen (*und auch alle anderen Möglichkeiten*) übereinstimmen. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

und nennt dies das bestimmte Integral von f über [a;b]. a und b heißen die (untere und obere) Integrationsgrenze, f der Integrand und x die Integrationsvariable.

Regeln für bestimmte Integrale:

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ *(anschaulich klar!)*
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ *(anschaulich klar!)*
- damit folgt: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
  anschaulich: man geht von rechts nach links, die Rechteckbreiten sind negativ!

b) Integralfunktionen und der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Def.: Ist f integrierbar in [a;b] und sind u,x $\in$ [a;b], so heißt $F_u(x) := \int_u^x f(t)dt$ eine Integralfunktion von f.

Satz: Ist f in [a;b] stetig und u $\in$ [a;b], so ist F_u differenzierbar in]a;b[, und es gilt $F_u' = f$.

(Anmerkung: f muss nicht stetig sein, damit sie integrierbar ist -- F ist aber an Unstetigkeitsstellen von f nicht differenzierbar!)

c) Stammfunktionen, unbestimmte Integrale und Berechnung von Integralen

Definition: Eine Funktion F heißt Stammfunktion zu f, wenn F' = f gilt. Das unbestimmte Integral steht für alle Stammfunktionen von f: $\int f(x)dx$ = F(x) + C

Beachte: Jede Integralfunktion ist also eine Stammfunktion – aber nicht jede Stammfunktion ist eine Integralfunktion! (Beispiel: f(x) = 2x ==> $F_u(x) = x^2 - u^2$, also ist z. B. $F(x) = x^2 + 1$ keine Integralfunktion.)

mit den Regeln für bestimmte Integrale folgt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx = \int_u^b f(x)dx - \int_u^a f(x)dx = F_u(b) - F_u(a) \text{ mit } u \in [a;b] \text{ beliebig}$$

Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante
==> $F_u(b) - F_u(a) = F(b) - F(a)$ mit beliebiger Stammfunktion F

$$\Longrightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Integration der Grundfunktionen:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \in \mathbb{N}$

2) $\int e^x dx = e^x + C$

3) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

außerdem:

- $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{R}$ ==> $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ==> $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

Integrationsregeln: *für bestimmte und unbestimmte Integrale, und Integralfunktionen!*

- Faktorregel: $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$
- Summenregel: $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- „lineare Substitution": $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

  z. B. $\int (2x+3)^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}(2x+3)^5 + C$; $\int e^{-3x} dx = \frac{1}{-3} \cdot e^{-3x} + C$;

  $\int \cos x \, dx = \int \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + C = \sin(x) + C$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

  z. B. $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$;

  $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$;

  $\int \frac{1}{e^{-x}+1} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} dx = \ln|1+e^x| + C$
- $\int f'(x)\, e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$

Beachte: Gebrochenrationale Funktionen erst in Asymptotenform bringen! Stammfunktion bisher nur bekannt, wenn Term von der Form $\frac{1}{(ax+b)^n}$ oder $\frac{f'(x)}{f(x)}$! (also z. B. $\frac{1}{x^2+1}$ nicht!)