Wie überprüft man den VZW einer Funktion g bei einer Nullstelle?

(nötig z. B. bei Extremstellen: $g = f'$; oder bei Wendestellen: $g = f''$)

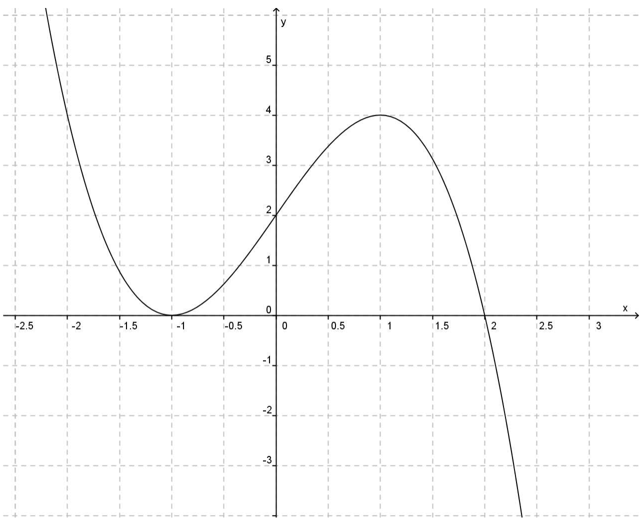
- lineare Funktionen: wenn die Gerade steigt, liegt bei der Nullstelle ein VZW von – nach + vor; wenn sie fällt, ein VZW von + nach –
  - Beispiel: $g(x) = -3x + 6$; g hat die Nullstelle $x_1 = 2$; da g eine fallende Gerade beschreibt, liegt bei $x_1 = 2$ also ein VZW von + zu – vor.

- quadratische Funktionen der Form $a\,(x + b)^2$ haben keinen VZW bei ihrer Nullstelle

- ganzrationale Funktionen (und Zähler von gebrochenrationalen Funktionen): Vielfachheit der Nullstelle von g überprüfen
  - ist die Vielfachheit ungerade bzw. gerade, so liegt ein bzw. kein VZW vor
  - damit bekommt man aber nur heraus, ***ob*** es einen VZW gibt, aber nicht, was für einen!
  - Beispiel: $g(x) = -x^3 + 3x + 2$. g hat die Nullstellen $x_{1,2} = -1$ (doppelt) und $x_3 = 2$ (einfach); bei –1 hat man also keinen VZW, bei 2 hat man einen VZW

- ***nur dann***, wenn die Nullstelle von g einfach ist, kann man die nächsthöhere Ableitung verwenden
  - ist $g' \neq 0$ bzw. $= 0$, so liegt ein bzw. VZW vor; genauer: ist $g' > 0$ bzw. < 0, so liegt ein VZW von – nach + bzw. von + nach – vor
  - ist die Nullstelle von g dagegen mehr als einfach, so ist ***immer*** $g' = 0$, egal, ob ein VZW vorliegt oder nicht – g' hilft einem dann also überhaupt nichts!
  - Beispiel: $g(x) = -x^3 + 3x + 2$; $g'(x) = -3x^2 + 3$. g hat die Nullstellen $x_{1,2} = -1$ (doppelt) und $x_3 = 2$ (einfach). $g'(-1) = 0$, da –1 eine doppelte Nullstelle von g ist, hier macht g' also keine Aussage darüber, ob g das VZ wechselt. $g'(2) = -9 < 0$, also wechselt g bei 2 das VZ von + zu –

- bei ganzrationalen Funktionen: Graph skizzieren (mit Hilfe der Nullstellen, ihrer Vielfachheiten und dem Verhalten für $x \to \pm\infty$)
  - Beispiel: $g(x) = -x^3 + 3x + 2$. g hat die Nullstellen $x_{1,2} = -1$ (doppelt) und $x_3 = 2$ (einfach). Der Graph verläuft von links oben nach rechts unten. Skizze:



Offensichtlich wechselt bei –1 das VZ nicht, bei 2 wechselt das VZ von + zu –

- Werte links und rechts der Nullstelle (aber noch „vor“ der nächsten Nullstelle!) einsetzen und Funktionswerte berechnen
  - Beispiel: $g(x) = -x^3 + 3x + 2$. g hat die Nullstellen $x_{1,2} = -1$ und $x_3 = 2$. Es ist $g(-1{,}1) = 0{,}031 > 0$ und $g(-0{,}9) = 0{,}029 > 0$, also wechselt bei –1 das VZ nicht; $g(1{,}9) = 0{,}841 > 0$ und $g(2{,}1) = -0{,}961 < 0$, also wechselt bei 2 das VZ von + zu –

komplexere Funktionen, die man als Produkt und/oder Quotient einfacherer Funktionen schreiben kann:

- VZ-Tabelle anlegen, Regeln von Vorderseite für jeden der Faktoren anwenden

schneller und einfacher ist aber oft folgendes:

- bei Brüchen: Zähler auf VZW untersuchen; dabei ist aber außerdem auch das VZ des Nenners zu beachten!
  - Beispiel 1: g(x) = $\frac{-x^3+3x+2}{x^2}$. Der Nenner ist in ganz $\mathbb{D}$ positiv, also gilt für die VZW von g dasselbe wie für die VZW des Zählers $-x^3 + 3x + 2$ (siehe Vorderseite!)
  - Beispiel 2: g(x) = $\frac{2x-6}{(2-x)^3}$ hat die Nullstelle $x_1 = 3$; der Zähler ist eine steigende Gerade (wechselt also von – zu +), der Nenner ist für $x_1 = 3$ aber negativ, also hat man insgesamt einen VZW von + zu –
  - Beispiel 3: g(x) = $\frac{(x-2)^2}{x+1}$. Der Zähler hat die doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 2$, wechselt also bei 2 das VZ nicht; das VZ des Nenners ist damit egal – der ganze Bruch wechselt bei 2 das VZ nicht.

- klappt auch bei Produkten
  - Beispiel: g(x) = x·cos(x) mit $\mathbb{D}_g = [-\pi/3;\pi]$. g hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi/2$. Bei 0 ist der zweite Faktor gleich 1, g verläuft also dort wie x, sprich: wechselt von – zu +. Bei $\pi/2$ ist der erste Faktor gleich $\pi/2$, g verläuft also dort wie $\pi/2 \cdot \cos(x)$, sprich: wechselt von + zu –.