Das Volumen eines Pyramidenstumpfs

Die Grundflächen und Höhen der kompletten bzw. der Ergänzungspyramide werden im Folgenden mit G, H bzw. mit G', H' bezeichnet, die Höhe des Pyramidenstumpfs mit h.

Dann gilt:

(1) $\left(\frac{H'}{H}\right)^2 = \frac{G'}{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{H'}{H} = \sqrt{\frac{G'}{G}} \quad \Rightarrow \quad H' = H\sqrt{\frac{G'}{G}} \qquad (*)$

(2) $H = H' + h$

mit (*): $H = H\sqrt{\frac{G'}{G}} + h \quad \Big| -H\sqrt{\frac{G'}{G}}$

$$H - H\sqrt{\frac{G'}{G}} = h \quad \Big| \cdot \sqrt{G}$$

$$H\sqrt{G} - H\sqrt{G'} = h\sqrt{G}$$

$$H(\sqrt{G} - \sqrt{G'}) = h\sqrt{G} \quad \Big| : \left(\sqrt{G} - \sqrt{G'}\right)$$

$$H = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \qquad (**)$$

(3) $V_{Stumpf} = V_{Pyramide} - V_{Ergänzungspyramide} = \frac{1}{3}GH - \frac{1}{3}G'H'$

mit (*): $= \frac{1}{3}GH - \frac{1}{3}G'H\sqrt{\frac{G'}{G}} = \frac{1}{3}H\left(G - G'\sqrt{\frac{G'}{G}}\right)$

mit (**): $= \frac{1}{3}\frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}\left(G - G'\sqrt{\frac{G'}{G}}\right) = \frac{1}{3}h\frac{G\sqrt{G} - G'\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$

$$= \frac{1}{3}h\frac{\left(G\sqrt{G} - G'\sqrt{G'}\right)\left(\sqrt{G} + \sqrt{G'}\right)}{\left(\sqrt{G} - \sqrt{G'}\right)\left(\sqrt{G} + \sqrt{G'}\right)} = \frac{1}{3}h\frac{G^2 + G\sqrt{GG'} - G'\sqrt{GG'} - G'^2}{G - G'}$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{G^2 - G'^2}{G - G'} + \frac{(G - G')\sqrt{GG'}}{G - G'}\right) = \frac{1}{3}h\left(G + G' + \sqrt{GG'}\right)$$