VI.1 Lineares und exponentielles Wachstum

317/1
a) exponentielles Wachstum; 1,35
b) exponentielle Abnahme; 0,8
c) lineares Wachstum; 5
d) exponentielle Abnahme; 0,5
e) exponentielles Wachstum; 3
f) lineare Abnahme; –250

318/2
a) 1,2; $f(t) = 100 \cdot 1{,}2^t$
b) 0,75; $f(t) = 200 \cdot 0{,}75^t$ (t in Tagen)
c) 3; $f(t) = 250 \cdot 3^t$ (t in Stunden)
d) $\frac{1}{3}$; $f(t) = 1500 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$ (t in Tagen)

318/3
a) Pro Zeiteinheit nimmt der Bestand jeweils um denselben Summanden –4 ab ➔ lineare Abnahme.
f(0) = 50 ➔ f(t) = –4t + 50
b) Nach 10 Tagen ist der Bestand gleich 10.

318/4
a) Pro Zeiteinheit nimmt der Bestand jeweils um denselben Faktor 1,5 zu ➔ exponentielles Wachstum.
(bei t = 5 wurde gerundet, der exakte Wert ist 181,875)
b) f(0) = 20 ➔ f(t) = $20 \cdot 1{,}5^t$
c) Nach 10 Tagen ist der Bestand etwa 1153.

318/5
a) Pro Zeiteinheit nimmt der Bestand jeweils um denselben Faktor 0,9 ab ➔ exponentielles Wachstum.
(bei t = 5 wurde gerundet, der exakte Wert ist 59,049)
b) f(0) = 100 ➔ f(t) = $100 \cdot 0{,}9^t$
c) Nach 8 Tagen ist der Bestand etwa 43.

318/6
a) Im Rahmen der Ablesegenauigkeit: Pro Zeiteinheit nimmt der Bestand jeweils um denselben Faktor zu ➔ exponentielles Wachstum.
b) *Wertetabelle anlegen ➔ im Rahmen der Ablesegenauigkeit ergeben sich die gezeigten Punkte*
c) Nach 10 Tagen ist der Bestand etwa 140.

319/7
a) 2 m, 4 m, …, 1024 m
b) f(t) = $1 \cdot 2^t$ (t in Stunden, f(t) in m)
c) In der 6. Stunde wächst die Pflanze zum 32 m, in der 12. Stunde um 2048 m.
d) Es dauert zwischen 28 und 29 Stunden.

319/8
a) f(t) = $1 \cdot 1{,}5^t$
b) Nach einer Woche sind etwa 17,1 m^2 bedeckt.
c) Es dauert etwas über 21 Tage.

319/9

a)

Feld	1	2	3	4	5	6	…	20
Anzahl der Reiskörner	1	2	4	8	16	32		524 288

b) $2^{63} \approx 9 \cdot 10^{18}$

c) Auf den ersten 3 Reihen liegen $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{23} = 2^{24} - 1 = 16\,777\,215$ Reiskörner, also 5 592 405 g Reis. Das genügt sogar für knapp 28 Jahre, wenn die Familie jährlich 200 kg Reis ist.

d) Der Reis auf dem 32. Feld ist knapp 1,8 Millionen € wert.

319/10

a) Die Größe des Baggersees wächst jede Woche um denselben Summanden 500 ➔ lineares Wachstum; S(0) = 700 ➔ $S(t) = 700 + 500 \cdot t$.
Die mit Algen bedeckte Fläche wächst jede Woche um denselben Faktor 1,8 ➔ exponentielles Wachstum; A(0) = 3 ➔ $A(t) = 3 \cdot 1{,}8^t$.

b) $S(\approx 13{,}25| \approx 7300)$, d. h. nach etwa 13 Wochen und 2 Tagen ist der Baggersee vollständig von Algen bedeckt; die Fläche von beiden ist dann etwa 7300 m^2. *(und natürlich ist es unrealistisch, dass der Graph von A dann über den Graphen von S hinaus weiter wächst!)*

319/11

a) jeweils Wert *nach* dieser Anzahl an Monaten!

Zeit in Monaten	1	2	3	4
Wert in €	9180	8427,24	7736,21	7101,84

b) K(0) = 10 000; Wert nimmt jeden Monat um den Faktor 0,918 ab ➔ $K(t) = 10\,000 \cdot 0{,}918^t$.

c) Der Eigentümer sollte den Farbkopierer spätestens nach etwa 16 Monaten verkaufen.

VI.2 Exponentialfunktionen

323/1

a) $f(x) = 100 \cdot 0{,}75^x$ b) $f(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{3}^x$

323/2

a) $f(x) = 8 \cdot 1{,}5^x$ b) $f(x) = 3 \cdot 0{,}2^x$

c) $f(x) = -2 \cdot 3^x$ d) $f(x) \approx 600 \cdot 1{,}2^x$

323/3

1: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{2}^x$ 2: $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$ 3: $f(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$

323/4

a) t in Jahren seit 1995, f(t) in Millionen

f(0) = 1,356 und f(20) = 2,449 ➔ $f(t) \approx 1{,}356 \cdot 1{,}03^x$

damit: f(5) ≈ 1,572; f(10) ≈ 1,822; f(15) ≈ 2,113

passt alles zur Tabelle ➔ tatsächlich exponentielles Wachstum

b) Die Bevölkerung wächst jährlich um 3%.

c) Im Jahre 2020 ist mit 2 839 000 zu rechnen, im Jahre 2025 mit 3 291 000.

VI.3 Logarithmen

325/1

a) 2	b) 3	c) 6	d) 2
e) 3	f) 0,5	g) 2	h) 2

325/2

a) 2	b) –1	c) –2	d) 3
e) 0	f) 6	g) –3	h) 0,5

326/3

a) ≈ 2,699	b) ≈ –0,699	c) ≈ 0,452	d) ≈ –0,845

326/4

a) 6	b) 0	c) –3	d) 1,5

326/5

a) falsch; $\log_{10}(10) = 1$, denn $10^1 = 10$

b) richtig, denn $\sqrt{6}^4 = 36$

c) richtig, denn $\sqrt{11}^0 = 1$

d) falsch; $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$, denn $\sqrt{2}^2 = 2$

326/6

a) log(6)	b) log(3)	c) log(10)

326/7

a) x log(7)	b) 5 log(x)	c) –log(x)	d) 0,5 log(x)

326/8

a) log(24)	b) log(6)	c) log(9)
d) log(3)	e) 0,5 log(x) – log(2)	d) –4 log(x)

326/9 Bei allen Teilaufgaben wird L3 verwendet und zusätzlich…

a) $243 = 3^5$	b) $49 = 7^2$	c) $0{,}5 = 2^{-1}$

326/10

a) log(2x)	b) $\log\left(\frac{7}{x}\right)$
c) log((x+2)x)	d) $\log\left(\frac{x+2}{x}\right)$
e) $\log\left(\frac{x^3}{x+1}\right)$	f) $\log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$
g) $\log\left(\frac{x^4}{(x+1)^2}\right)$	h) $\log\left(\frac{1}{x(x+2)^2}\right)$

326/11

a) log(a – b) ≠ log(a) – log(b)

b) log(a + b) ≠ log(a) + log(b)

c) log(a + b) ≠ log(a) · log(b)

d) Klammer setzen vergessen und dadurch Vorzeichenfehler:

$\lg\left(\frac{x}{y\cdot z^2}\right) = \lg(x) - (\lg(y) + \lg(z^2)) = \lg(x) - \lg(y) - \lg(z^2) = \lg(x) - \lg(y) - 2\cdot\lg(z)$

328/1
a) $x \approx 1{,}76$ b) $x \approx 0{,}315$ c) x = 0

328/2
a) $x \approx 0{,}388$ b) x = 0 c) –
d) x = 1 e) − f) $x \approx -0{,}528$

328/3
a) $x \approx 0{,}428$ b) $x \approx -1{,}58$ c) $x \approx 0{,}341$

328/4
a) x = 0 b) x = 0 c) $x \approx 0{,}823$

328/5
a) x = 2 b) x = 5 c) x = –1

328/6
a) x = 3,5 b) x = 1 c) x = 2

328/7
a) richtig
b) falsch; richtig: $3^x = 18$ ⇔ $x \approx 2{,}63$
c) falsch; richtig: $2^x = 2$ ⇔ x = 1 (Ergebnis zufällig richtig!)

328/8
a) Das Kapital ist auf etwa 579,64 € angewachsen.
b) Das Kapital ist nach gut 37 Jahren so weit angewachsen.

328/9
a) $f(t) = 95 \cdot 0{,}99^t$ (t in Wochen, f(t) in kg)
b) Die Waage müsste etwa 89,4 kg anzeigen.
c) Es würde gut 11 Wochen dauern.

333/5
a) $f(t) \approx 4\,000 \cdot e^{0{,}5t}$ (t in Stunden seit 9:00 Uhr)
b) Um 11:00 Uhr sind etwa 10 873 Bakterien vorhanden, um 16:00 Uhr etwa 132 462.
c) Um etwa 10:23 Uhr hat sich der Bestand verdoppelt.

333/6
a) Bei der Entnahme befanden sich etwa 35 470 Bakterien in der Probe.
b) Nach etwa 517 min beträgt die Bakterienanzahl 100 000.

334/7
a) $f(t) \approx 45\,000 \cdot e^{0{,}02624t}$ (t in Jahren seit heute, f(t) in fm)
b) Der Bestand war etwa 40 517 fm.
c) Der Bestand wird etwa 55 509 fm sein.
d) Der Bestand war etwa 31 995 fm.

334/8
a) Die Halbwertszeit ist etwa 330 Sekunden. *??? passt zu keinem der Isotope von Radon!*
b) Nach etwa 2193 s sind 99% zerfallen.
c) In 100 Tagen zerfällt praktisch alles, da bleibt mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit kein einziges Atom übrig. *??? wohl Fehler in Aufgabenstellung*

334/10

a) Am Anfang bedeckte die Kultur eine Fläche von etwa 3,1628 cm^2.

b) Die bedeckte Fläche verdoppelt sich nach jeweils etwa 17,67 min.

334/12 Nach etwa 246 Jahren hat sich die Anzahl um 10% verringert.

335/13

a) $p(h) = 1\,000 \cdot 0{,}88^h \approx 1\,000 \cdot e^{-0{,}12783h}$

b) Der Luftdruck war dort etwa 563 hPa.

c) Der Druck hat um etwa 43,7% abgenommen.

d) Dieser Luftdruck wurde in einer Höhe von etwa 7,17 km registriert.

Die folgenden Aufgaben passen alle besser zum Lehrplan der 12. Klasse!

333/1

a) $f(t) \approx 300 \cdot e^{0{,}33647t}$ b) $f(t) \approx 10\,000 \cdot e^{-0{,}51083t}$

333/2

a) ≈ 1,64872; ≈ 64,872% b) $\approx\ 0{,}04979; \approx\ -95{,}021\%$

333/3

a) f(0) = 10 000; f(1) = 15 000 ➔ $e^k = 1{,}5$ ➔ k ≈ $0{,}405$ ➔ $f(t) \approx 10\,000 \cdot e^{0{,}405t}$

b) Der Bestand hat sich nach etwa 1,71 Tagen verdoppelt.

c) Nach 14 Tagen sind etwa 1,17 Millionen Bakterien vorhanden.

d) Nach etwa 5,69 Tagen sind 100 000 Bakterien vorhanden.

333/4

a) Die Halbwertszeit beträgt etwa 27,7 Jahre.

b) Nach zwei Halbwertszeiten sind noch 5 mg vorhanden. (Nicht etwa gar nichts mehr: Man könnte ja denken, wenn zweimal die Hälfte zerfällt, dann ist nichts mehr übrig. Der Denkfehler dabei ist, dass nicht zweimal die Hälfte der *ursprünglichen* Menge zerfällt, sondern einmal die Hälfte der ursprünglichen Menge und beim zweiten Mal die Hälfte von der Menge, die danach noch übrig ist.)

c) Nach 5 Jahren sind noch etwa 88,2% übrig.

d) Es dauert knapp 9 Tage, bis 4 mg zerfallen sind.

334/9

a) $k \approx 0{,}10217; \quad h_0 \approx 6{,}1335$

b) Nach etwa 4,05 Minuten ist die Schaumhöhe 4 cm, nach etwa 13,9 Minuten ist sie auf ein Viertel des Anfangswertes gesunken.

334/11

a) $k \approx 0{,}02372\ a^{-1}$

b) Die Verdopplungszeit beträgt etwa 29,23 Jahre.

c) Eine jährliche Zuwachsrate von p% bedeutet, dass der Wachstumsfaktor gleich $1 + \frac{p}{100}$ ist. Also muss gelten: $e^{k \cdot 1} = 1 + \frac{p}{100}$. Daraus folgt sofort die Behauptung.

335/14

a) $k \approx 1{,}210 \cdot 10^{-4}\ a^{-1}$

b) Die Stauden wurden vor etwa 1949 Jahren geerntet.

339/15

a) Zu Beginn der Beobachtung sind 1000 m^2 bedeckt, langfristig werden 5000 m^2 bedeckt sein.

b) Nach 2 Wochen sind etwa 1591 m^2 bedeckt. ,42

c) Die Algenfläche wächst um etwa 262 m^2.

d) Diese Fläche ist nach etwa 8,66 Wochen bedeckt.

339/16

a) $e^{-0{,}1t}$ und damit auch $-15e^{-0{,}1t}$ geht langfristig gegen 0, also bleibt 20 übrig. In der Abbildung sieht man, dass sich der Graph an die Gerade y = 20 annähert.

b) Die Flüssigkeit hat sich dann auf etwa 11°C erwärmt.
Es dauert etwa 15 Minuten.
rechnerisch: etwa 10,9°C; etwa 16,1 min

c) $f(t+1) - f(t) = \left(20 - 15\,e^{-0{,}1(t+1)}\right) - \left(20 - 15\,e^{-0{,}1t}\right) = -15\,e^{-0{,}1t-0{,}1} + 15\,e^{-0{,}1t}$

$= 15e^{-0{,}1t}\left(1 - e^{-0{,}1}\right) > 0$

➔ f(t+1) > f(t)

339/17

a) maximal 50 Mäuse ➔ $f(t) = 50 - a \cdot e^{-kt}$

zu Anfang 8 Mäuse: f(0) = 8 ➔ $50 - a = 8$ ➔ $a = 42$

nach 10 Wochen 26 Mäuse: f(10) = 26 ➔ $50 - 42 \cdot e^{-k \cdot 10} = 26$ ➔ … $k \approx 0{,}056$

b) Es leben dann 18 Mäuse im Keller.

c) Das dauert etwa 25,6 Wochen.

340/18

a) $k \approx 0{,}00922\ s^{-1}$

b) ***Stoff der 12. Klasse!!!*** $\dot{T}(t) \approx -0{,}5532 \cdot e^{-0{,}00922t} < 0$ ➔ Die Temperatur nimmt ab.

$\lim\limits_{t \to \infty} T(t) = T_U = 20°C$ ➔ Der Kaffee kühlt sich langfristig auf Umgebungstemperatur ab.

340/19

a) f(0) = 58 + 22 = 80 passt; f(2) $\approx 50{,}42 + 22 \approx 72$ passt halbwegs usw.

Die Temperatur nach 8 Minuten wurde offensichtlich falsch gemessen: von 5 auf 8 Minuten würde die Temperatur zu- statt abnehmen, ergibt keinen Sinn.

b) Dies ist nach etwa 6,81 min der Fall.

c) ***Stoff der 12. Klasse!!!*** $\dot{T}(t) = 58 \cdot (-0{,}07) \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} + 0 = -4{,}06 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} = g(t)$

340/20

a) A = B = 600 g; k ≈ 0,01823

b) Dies ist nach etwa 126 min der Fall.