Vielfachheiten von Nullstellen mit Ableitungen

Es sollte schon bekannt sein, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion

- bei einer doppelten (oder vierfachen, …) Nullstelle jeweils die x-Achse berührt, also dort einen Extrempunkt hat – also ist dort nicht nur die Funktion, sondern auch die erste Ableitung gleich 0, und
- bei einer dreifachen (oder fünffachen, …) Nullstelle jeweils die x-Achse waagrecht schneidet, also dort einen Terrassenpunkt hat – also ist dort nicht nur die Funktion, sondern auch die erste und die zweite Ableitung gleich 0.

Das kann man verallgemeinern zum

Satz: Hat eine ganzrationale Funktion (vom Grad n) die k-fache Nullstelle x_0, so gilt $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, …, $f^{(k-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Dabei bezeichnet $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f. Offensichtlich muss $0 < k \leq n$ sein.

Beweis:
Dass x_0 eine k-fache Nullstelle von f ist, bedeutet nach Definition, dass man f(x) schreiben kann als

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x),$$

wobei g eine ganzrationale Funktion (vom Grad n–k) ist mit $g(x_0) \neq 0$.

Wir berechnen nun die erste Ableitung mittels der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x - x_0)^k)' \cdot g(x) + (x - x_0)^k \cdot g'(x) \\ &= k\,(x - x_0)^{k-1} \cdot g(x) + (x - x_0)^k \cdot g'(x) \\ &= (x - x_0)^{k-1} \cdot (k \cdot g(x) + (x - x_0) \cdot g'(x)), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgeklammert wurde. Abkürzend schreiben wir dann für das, was in der Klammer steht, $g_1(x)$, also folgt

$$f'(x) = (x - x_0)^{k-1} \cdot g_1(x) \text{ mit } g_1(x) = k \cdot g(x) + (x - x_0) \cdot g'(x).$$

Weil g vom Grad n–k ist, ist g' vom Grad n–k–1, also ist $(x - x_0) \cdot g'(x)$ insgesamt wieder vom Grad n–k. Außerdem ist k·g sicher auch vom Grad n–k. Damit ist die Funktion g_1 insgesamt auch vom Grad n–k. Weiterhin ist $g_1(x_0) = k \cdot g(x_0) + (x_0 - x_0) \cdot g'(x_0) = k \cdot g(x_0) + 0 \cdot g'(x_0) = k \cdot g(x_0)$, und weil $g(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt wurde, folgt, dass auch $g_1(x_0) \neq 0$ ist. Insgesamt können wir folgern: x_0 ist eine Nullstelle von f' mit der Vielfachheit k–1.

Das Argument können wir mit der zweiten Ableitung genauso wiederholen. Es ergibt sich: Man kann die zweite Ableitung schreiben als $f''(x) = (x - x_0)^{k-2} \cdot g_2(x)$ mit einer ganzrationalen Funktion g_2 vom Grad n–k, für die außerdem $g_2(x_0) \neq 0$ gilt, das heißt, x_0 ist eine Nullstelle von f'' mit der Vielfachheit k–2. Bei jedem Ableiten nimmt die Vielfachheit der Nullstelle also jeweils um 1 ab.

So geht es immer weiter. Schließlich ergibt sich:

$$f^{(k-1)}(x) = (x - x_0)^1 \cdot g_{k-1}(x)$$
$$f^{(k)}(x) = (x - x_0)^0 \cdot g_k(x) = g_k(x)$$

mit $g_{k-1}(x_0) \neq 0$ und $g_k(x_0) \neq 0$, und daraus folgt die Behauptung:

$$f(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(k-1)}(x_0) = 0, \text{ aber } f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Das verwendet man umgedreht nun auch, um die Vielfachheit von Nullstellen *allgemein* zu definieren (für beliebige Funktionen, nicht nur ganzrationale):

Definition: Gilt für eine reelle Funktion f und eine Zahl $x_0 \in D_f$, dass f bei x_0 mindestens k mal differenzierbar ist und $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, …, $f^{(k-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ ist, dann heißt x_0 eine k-fache Nullstelle von f.