Auswertung von Versuchsdaten – eine Anleitung

Beachte: Die Formulierungen „B ist (direkt) proportional A‘‘, „B ~ A‘‘, und „B = k·A mit k = konstant‘‘ bedeuten alle dasselbe! k heißt dabei die **Proportionalitätskonstante**.

Als Erstes muss man sich immer eine Wertetabelle mit den Größen A (erste Zeile) und B (zweite Zeile) machen. Mit etwas Glück ist die Tabelle schon gegeben, meist ist aber eher eine Tabelle mit *anderen* Größen vorgegeben, von denen A und B dann abhängen.

Z. B. könnte die Aufgabenstellung sein: „Zeigen Sie, dass T^2 direkt proportional zu r^3 ist.‘‘, in der gegebenen Wertetabelle stehen aber nur T und r. Dann muss man aus den gegebenen Werten zunächst die gewünschten ausrechnen (im Beispiel: die gegebenen Werte von T quadrieren, die gegebenen Werte von r hoch 3 nehmen) und damit eben eine neue Tabelle machen.

Beim Anlegen dieser neuen Tabelle muss man immer auch die Einheiten umrechnen; dies macht man genauso, wie man auch die Größen selbst umrechnen. Auch eventuelle Zehnerpotenzen sind zu beachten. Beispiele:

1) Hat a die Einheit 10^{12} m, dann hat a^3 die Einheit 10^{36} m^3.

2) Hat v die Einheit $m/s = m \cdot s^{-1}$ und t die Einheit s, dann hat v/t die Einheit $m/s/s = m/s^2 = m \cdot s^{-2}$.

Außerdem sollte man beim Anlegen der Tabelle auch die gegebenen gültigen Ziffern beachten.

Rechnerische Auswertung:

Wenn man nur zeigen soll, dass B direkt proportional zu A ist, dann muss man für jedes Wertepaar aus der (gegebenen oder berechneten) Tabelle jeweils den Quotienten B/A ausrechnen; bei allen Quotienten sollte (in etwa, Abweichung von höchstens etwa 10%) dasselbe herauskommen. Das schreibt man dann auch so hin: „Der Quotient B/A ist (im Rahmen der Messgenauigkeit) konstant, also gilt B ~ A.‘‘

Wenn man den Wert der Proportionalitätskonstanten auch berechnen soll, dann bildet man am Schluss noch den Mittelwert aller dieser Quotienten.

Zeichnerische Auswertung:

Im Koordinatensystem macht man die Achse für A (unabhängige Messgröße) nach rechts, die für B (abhängige Messgröße) nach oben. (Dies nennt man ein „A-B-Diagramm‘‘ oder „B(A)-Diagramm‘‘, oft sagt man dafür auch, dass man „B in Abhängigkeit von A‘‘ darstellt.) Den Maßstab sollte man so wählen, dass die Zeichnung möglichst groß wird (etwa eine halbe Seite). Allerdings sollte man den Maßstab auch so wählen, dass Umrechnungen möglichst einfach sind. (Beispiel: 0,5 $\triangleq$ 10 Kästchen bzw. 5 Kästchen, *aber nicht* 3 oder 7 Kästchen.) Die Achsen *müssen* beschriftet werden! Man muss die jeweils dargestellte Größen einschließlich ihrer Einheiten (und passender Zehnerpotenz bzw. SI-Präfix wie z. B. k für „kilo‘‘) an die Enden der Achsen schreiben und auch die Achsen bis zum größten vorhandenen Tabellenwert beziffern!

Dann zeichnet man die Wertepaare aus der (gegebenen oder berechneten) Tabelle als Punkte ein. Manchmal hat man aus dem Text noch Informationen für einen (oder mehrere) zusätzliche Punkte. (Steht im Aufgabentext z. B., dass die Beschleunigung eines Körpers „aus der Ruhe‘‘ stattfindet, dann bedeutet dies, dass man im t-v-Diagramm für t = 0 den Wert v = 0 hat.)

Durch die eingezeichneten Punkte zeichnet man dann (mit Lineal!) eine (Halb-)Gerade nach Augenmaß, sodass alle Punkte in etwa denselben Abstand davon haben bzw. möglichst viele sogar darauf liegen. (Dies nennt man eine **Ausgleichsgerade**.) Diese Gerade muss nicht zwingend durch den Ursprung verlaufen, sollte aber zumindest nahe dran sein.

Wenn man nur zeigen soll, dass B direkt proportional zu A ist, dann genügt ein Satz der Art „Im Rahmen der Mess- und Zeichengenauigkeit ergibt sich eine Ursprungs(halb)gerade.‘‘ unter der Zeichnung.

Wenn man den Wert der Proportionalitätskonstante k berechnen soll, dann muss man noch ein (möglichst großes!) Steigungsdreieck einzeichnen (dafür Punkte auf der Geraden wählen, die keine Messpunkte sind) und daraus die Steigung berechnen. Auch dabei muss man sowohl den Maßstab als auch die Einheiten und die gültigen Ziffern beachten! Die beiden Katheten des Steigungsdreiecks sind auch entsprechend zu beschriften!

Beispiel 1: Planeten bewegen sich in Ellipsenbahnen um die Sonne. In der folgenden Tabelle sind Werte für die große Halbachse a dieser Ellipse und die Umlaufzeiten T um die Sonne gegeben:

Planet	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn
a in 10^{12} m	0,11	0,15	0,23	0,78	1,4
T in 10^{8} s	0,19	0,32	0,59	3,7	9,3

Zeigen Sie rechnerisch, dass $T^2 \sim a^3$ gilt („3. Kepler'sches Gesetz", nach dem deutschen Astronomen Johannes Kepler, 1571-1630), und berechnen Sie die Proportionalitätskonstante k.

Lösung: *Zunächst benötigt man eine Tabelle mit den Werten von a^3 und T^2. Diese kann man dann gleich noch für die rechnerische Auswertung durch eine dritte Zeile ergänzen, in die man die Quotienten T^2/a^3 schreibt. Dabei Zehnerpotenzen und Einheiten beachten! Bei den Rechnungen darauf achten, dass alle Daten mit zwei gültigen Ziffern gegeben wurden, also gilt das auch für die Rechenergebnisse!*

a^3 in 10^{36} m^3	0,0013	0,0034	0,012	0,47	2,7
T^2 in 10^{16} s^2	0,036	0,10	0,35	14	86
T^2/a^3 in 10^{-20} s^2/m^3	28	29	29	30	32

Im Rahmen der Messgenauigkeit ist der Quotient T^2/a^3 konstant *(alle Werte sind etwa gleich 30, mit Abweichungen von weniger als 10% nach oben und unten)*, also ist $T^2 \sim a^3$. Für die Proportionalitätskonstante ergibt sich

$$k = \frac{28 + 29 + 29 + 30 + 32}{5} \cdot 10^{-20} \frac{s^2}{m^3} = 3{,}0 \cdot 10^{-19} \frac{s^2}{m^3}$$

Auch hier: Geltende Ziffern und Einheit beachten!

Beispiel 2: Ein Körper wird durch eine Kraft F auf einer Kreisbahn mit Radius r = 0,35 m und Geschwindigkeit v gehalten. Dabei werden folgende Werte gemessen:

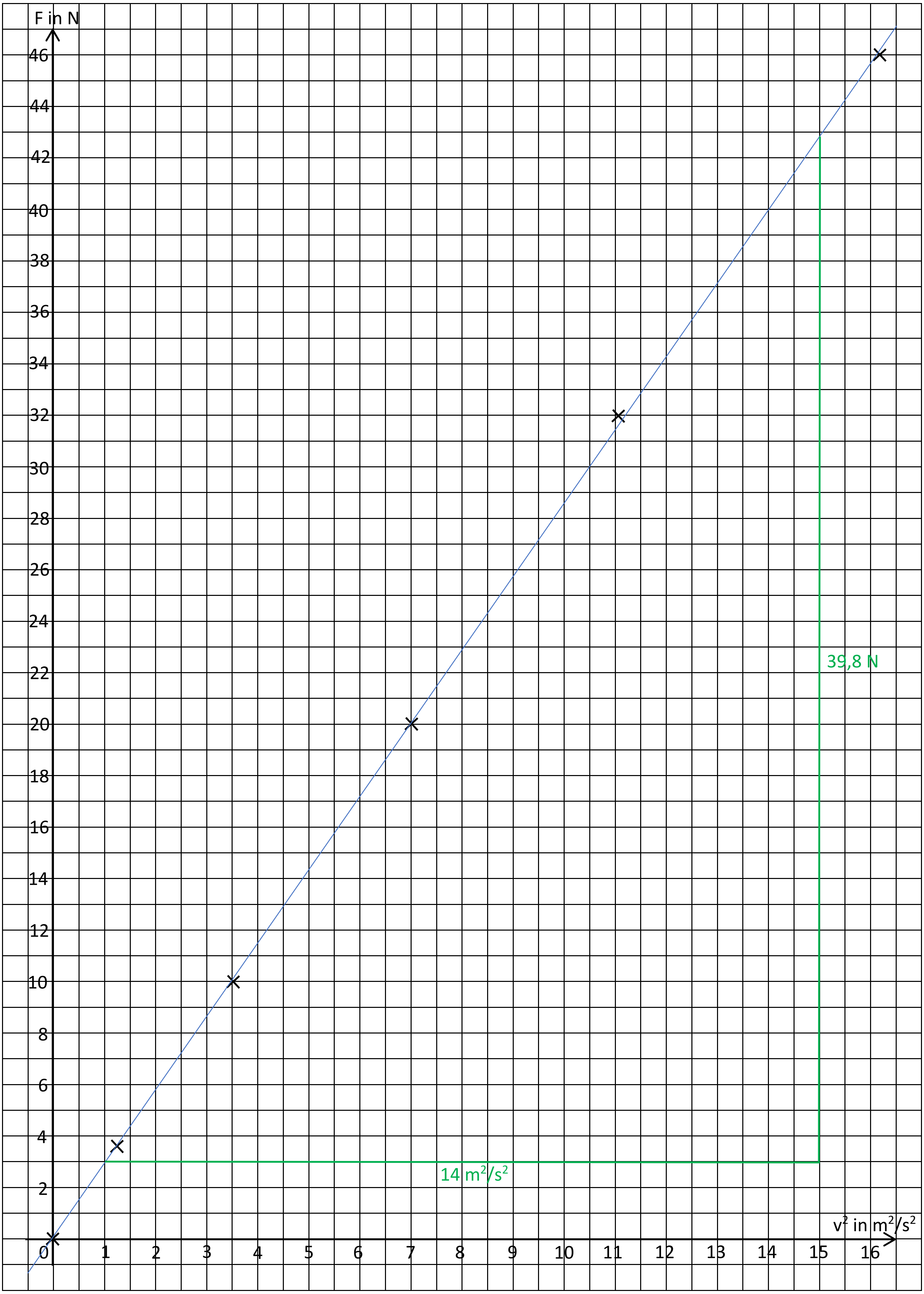
v in m/s	1,12	1,89	2,65	3,33	4,02
F in N	3,6	10	20	32	46

Ruht der Körper, so wird bekanntlich keine Kraft benötigt. (1. Newton'sches Gesetz)
a) Zeigen Sie mit einer zeichnerischen Auswertung, dass $F = k \cdot v^2$ gilt, und ermitteln Sie den Wert von k aus der Zeichnung.
b) Es gilt der Zusammenhang $F = \frac{mv^2}{r}$. Berechnen Sie mithilfe Ihres Ergebnisses aus Teil (a) die Masse m des Körpers.

Lösung: a) *Zunächst benötigt man eine Tabelle mit den Werten von v^2 (und F). Dabei die Einheit beachten! Bei den Rechnungen darauf achten, dass die Daten für v mit drei gültigen Ziffern gegeben wurden, also gilt das auch für die Rechenergebnisse!*

v^2 in m^2/s^2	1,25	3,57	7,02	11,1	16,2
F in N	3,6	10	20	32	46

Nun überlegt man sich einen passenden Maßstab. v^2 wird nach rechts aufgetragen. Eine DIN A4-Seite ist etwa 21 cm breit, und der höchste Wert hier ist 16,2. Also bietet sich als Maßstab an: 1 cm entspricht 1 m^2/s^2. F wird nach oben aufgetragen. Eine halbe DIN A4-Seite ist knapp 15 cm hoch, und der höchste Wert hier ist 46. Die Zeichnung kann ruhig auch ein wenig größer werden als eine halbe Seite, also bietet sich als Maßstab an: 1 cm entspricht 2 N. Wenn man die Werte einzeichnet, sollte man auch das 1. Newton'sche Gesetz beachten, auf das ja explizit hingewiesen wird: Für $v^2 = 0$ m^2/s^2 hat man F = 0 N.


F in N
46
44
42
40
38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
v² in m²/s²
39,8 N
14 m²/s²

Im Rahmen der Mess- und Zeichengenauigkeit ergibt sich eine Ursprungshalbgerade, also ist $F = k \cdot v^2$.

Steigungsdreieck ➔ $k = \frac{39{,}8\ \mathrm{N}}{14\ \mathrm{m^2/s^2}} = 2{,}8\ \frac{\mathrm{Ns^2}}{\mathrm{m^2}} = 2{,}8\ \frac{\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s^2}}\mathrm{s^2}}{\mathrm{m^2}} = 2{,}8\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$

Beachte: Da bei den Werten von F in der Tabelle nur jeweils zwei gültige Ziffern angegeben sind, kann man auch k nur auf zwei gültige Ziffern genau angeben! Die Einheit sollte man auch noch umrechnen.

b) $F = \frac{mv^2}{r} = k \cdot v^2$ ➔ $k = \frac{m}{r}$ ➔ $m = k \cdot r = 2{,}8\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}35\ \mathrm{m} = 0{,}98\ \mathrm{kg}$

Auch hier wieder: gültige Ziffern und Einheiten beachten!

Bonus: Ausgleichsgerade mit dem Taschenrechner

(Hier am Beispiel des CASIO fx-86DE PLUS; sollte mit anderen CASIO-Rechnern ähnlich funktionieren.)

Zunächst muss man in den statistischen Rechnungsmodus wechseln und dort auswählen, dass man eine Gerade berechnen will (der Fachausdruck dafür ist „lineare Regression‘‘). Das macht man mit:

Mode 2 (STAT) 2 (A+BX)

Der Taschenrechner zeigt dann eine Tabelle an: Links sind die Zeilen durchnummeriert, oben steht als Spaltenüberschriften x und y. In der Spalte x gibt man die Werte der unabhängigen Variable ein und bestätigt jede Werteingabe mit =. Wenn man unten angekommen ist, kommt man mit ▼ wieder nach oben und dann mit ► in die Spalte für y. Dort dann die Werte der abhängigen Variable eingeben und wieder jeweils mit = bestätigen.

Hat man alle Werte eingegeben, beendet man die Eingabe mit AC. Dadurch wird die Tabelle geschlossen (die eingegebenen Werte bleiben aber im Speicher), und man kann die Auswertung anfangen: Den y-Achsenabschnitt erhält man nun mit

Shift 1 (STAT) 5 (Reg) 1 (A) =

die Steigung dagegen mit

Shift 1 (STAT) 5 (Reg) 2 (B) =