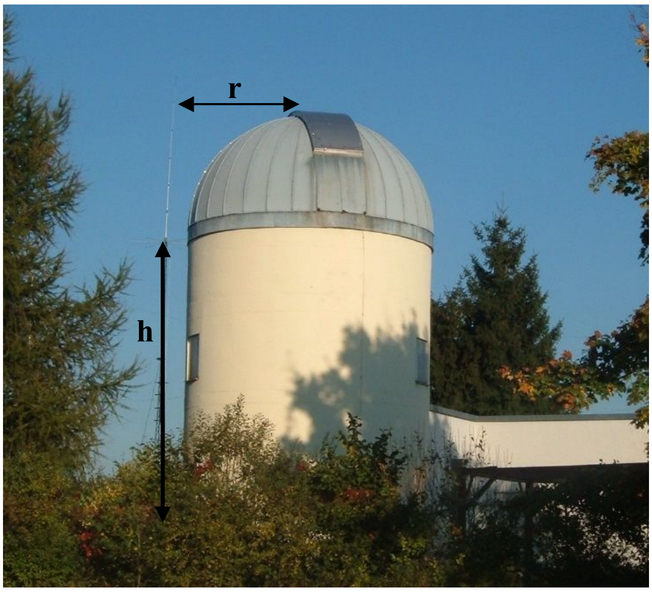
Allgemeines Vorgehen bei Extremwertaufgaben

am Beispiel der folgenden Aufgabe:
Eine Sternwarte hat meist die Form eines Zylinders (Radius r, Höhe h) mit einer oben aufgesetzten Halbkugel (siehe z. B. die im Bild unten gezeigte Fritz-Weithas-Sternwarte in Neumarkt). Die gesamte Oberfläche einer neu gebauten Sternwarte soll $O = 150\,\pi\ m^2$ betragen. Einheiten können im Folgenden ignoriert werden.



Berechnen Sie, für welche Abmessungen r und h das Volumen des zylinderförmigen Unterteils am größten wird, und geben Sie dieses größte Volumen an.

allgemein	**im Beispiel**
Falls noch nicht vorgegeben: Skizze machen, alle gegebenen und relevanten Größen eintragen!	
Schauen, was gesucht ist: Was soll möglichst groß oder möglichst klein sein? Passende Formel(n) dazu raussuchen.	Das Volumen des zylinderförmigen Unterteils soll am größten werden. $V_{Zylinder} = \pi r^2 h$
In der Formel hat man im Allgemeinen mehrere Variablen. Man muss also aus der Aufgabe noch weitere Informationen („Nebenbedingungen") heraussuchen, um alle Variable bis auf eine loszuwerden. Wieder: Passende Formel(n) dazu raussuchen.	Die gesamte Oberfläche soll $150\,\pi\ m^2$ sein. Die Oberfläche besteht aus der Mantelfläche des Zylinders ($M = 2\,\pi\, r\, h$) und der Oberfläche der Halbkugel ($O = \frac{1}{2} \cdot 4\,\pi\, r^2$). Also ist die Nebenbedingung: $2\,\pi\, r\, h + 2\,\pi\, r^2 = 150\,\pi$.
Eine Variable wählen, die man am Schluss behalten will. Alle anderen Variablen durch diese ausdrücken.	Es ist einfacher, die Nebenbedingung nach h aufzulösen als nach r, also machen wir das auch so, wir drücken also h durch r aus (und behalten damit am Schluss nur r übrig): $h = \frac{75}{r} - r$
in die Formel am Anfang (gesuchte Größe) einsetzen, dann hat man eine Funktion, die nur von einer Variable abhängt („Zielfunktion")	$V(r) = \pi r^2 \cdot \left(\frac{75}{r} - r\right) = \pi(-r^3 + 75r)$
Definitionsmenge bestimmen: Manchmal kann man aus der Skizze direkt ablesen, welche Werte die Variable nur annehmen kann, manchmal muss man es noch ausrechnen. Meistens ist es hilfreich, darauf zu achten, dass alle Längen positiv sein müssen.	$r > 0$ und $h > 0$ ➔ $\frac{75}{r} - r > 0$ ➔ $r^2 < 75$ Eigentlich muss man hier nun eine quadratische Ungleichung lösen (Skizze…). Weil aber $r > 0$ ist, kann man auch einfach die Wurzel ziehen: $r < \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ ➔ $D_V =]0; 5\sqrt{3}[$
Stellen mit waagrechter Tangente bestimmen: 1. Ableitung = 0 setzen, dabei D beachten	$\pi(-3r^2 + 75) = 0$ ➔ $r_1 = 5$ $(r_2 = -5 \notin D_V)$

Überprüfen, ob dies wirklich ein relatives Maximum (bzw. Minimum) ist: Vorzeichen der 2. Ableitung oder Monotonie (z. B. aus Skizze des Graphen der 1. Ableitung) verwenden	V''(5) = $\pi(-6 \cdot 5)$ < 0 ➔ rel. Max. oder Skizze von $G_{V'}$: ….. VZW von + nach – ➔ rel. Max.
Überprüfen, ob dies wirklich das ***absolute*** Maximum ist: Randwerte berechnen und vergleichen, oder mit Monotonie argumentieren	$\lim\limits_{r \to 0} V(r) = 0$; $\lim\limits_{r \to 5\sqrt{3}} V(r) = 0$; V(5) = 250π ➔ abs. Max. bei r = 5 oder: aus Skizze von $G_{V'}$: V ist sms in]0;5[, smf in]5; $5\sqrt{3}$[➔ abs. Max. bei r = 5
wenn verlangt: andere Abmessungen auch noch ausrechnen	h = $\frac{75}{5} - 5$ = 10
Antwortsatz formulieren; hier sollte man die Einheiten angeben und im Allgemeinen sinnvoll runden.	Das Volumen des zylinderförmigen Unterteils wird am größten, nämlich etwa 785 m^3, für einen Radius von 5 m und eine Höhe von 10 m.

Übliche Nebenbedingungen:

- Kantenlängen oder Summen davon gegeben (Flächeninhalt oder Volumen gesucht)
- Punkt liegt auf Funktionsgraph
- rechtwinkliges Dreieck in Skizze ➔ Satz von Pythagoras verwenden
- Oberfläche gegeben (Volumen gesucht) – oder umgekehrt

Manchmal wird auch nach dem größten / kleinsten Abstand zwischen Graphen oder nach der größten / kleinsten Steigung (oder Gefälle) gefragt. Dann braucht man keine Nebenbedingung, sondern im ersten Fall ist die Zielfunktion einfach die Differenz der beiden gegebenen Funktionen, im zweiten Fall ist die Zielfunktion die Ableitung der gegebenen Funktion.