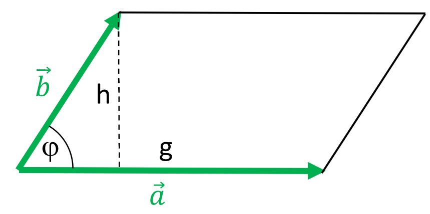
Das Vektorprodukt

Mithilfe von Vektoren kann man auch Flächeninhalte berechnen. Am einfachsten geht das bei einem Parallelogramm, das von zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ „aufgespannt“ wird:



Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt: $A =$

Die Höhe h kann man mittels Trigonometrie aus der Länge der Seite b berechnen: $h =$

Also ist: $A =$

Das sieht ähnlich aus wie ein Skalarprodukt. Um die Formel für das Skalarprodukt hier verwenden zu können, quadrieren wir den Flächeninhalt und setzen dann ein, dass $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ ist:

$A^2 =$

Im Folgenden rechnen wir erst mal nur in zwei Dimensionen. Dann ist $\vec{a} \circ \vec{b} =$ und

$|\vec{a}|^2 =$, $|\vec{b}|^2 =$, also

$A^2 =$

In drei Dimensionen geht die Rechnung ähnlich, ist nur noch aufwendiger. Es ergibt sich dann schließlich:

$$A^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

Das sieht nun aber wieder wie das Quadrat eines Vektors aus! Deshalb definiert man:

Das <u>Vektorprodukt</u> (auch: <u>Kreuzprodukt</u> oder inneres Produkt) der beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist der Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren ergibt also wieder einen Vektor, keinen Skalar!

Oben haben wir gezeigt, dass für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt: $A^2 = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$; also folgt:

$$A_{Parallelogramm} =$$

Ein Dreieck ist ein Parallelogramm, also folgt für den Flächeninhalt des von $\vec{a}, \vec{b}$ „aufgespannten“ Dreiecks:

$$A_{Dreieck} =$$

Da jedes Vieleck in zerlegt werden kann, folgt: Der Flächeninhalt jedes Vielecks ist berechenbar!

weitere wichtige geometrische Bedeutung:

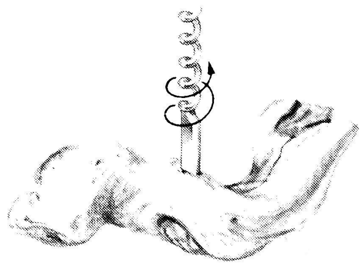
Berechnet man $\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) =$

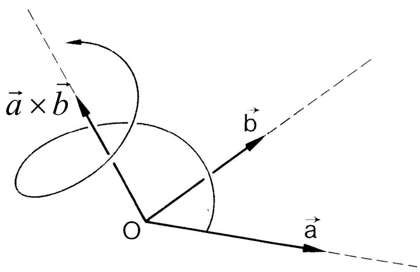
und ebenso $\vec{b} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) =$, so folgt:

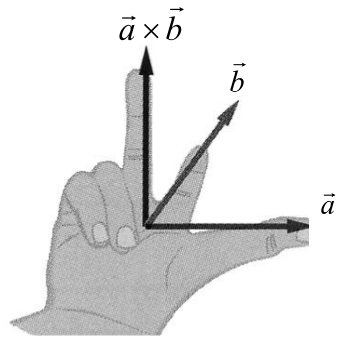
Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren steht immer auf den beiden Vektoren.

Rechenregeln:

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein „Rechtssystem", d. h.: dreht man $\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg zu $\vec{b}$, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$in Richtung einer Rechtsschraube; alternativ: Hält man bei der rechten Hand den Daumen in Richtung von $\vec{a}$ und den Zeigefinger in Richtung von $\vec{b}$, so zeigt der Mittelfinger, wenn man ihn senkrecht zur Handfläche hält, in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$:







- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ („Anti-Kommutativgesetz"); die Reihenfolge ist also wichtig!
- Spezialfall: Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ kollinear, ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms gleich Null, also $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, und daraus folgt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ („gemischtes Assoziativgesetz")
- dagegen gilt ***nicht*** ein Assoziativgesetz der Form $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$!
  (aber es gilt die sogenannte „Jacobi-Identität": $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$
  außerdem kann man das doppelte Vektorprodukt auch mittels des Skalarprodukts ausdrücken:
  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \circ \vec{b})$ („bac-cab-Formel"))