

Umkehrfunktionen

Bekanntlich wird in den USA eine andere Temperaturskala als in Europa benutzt: Temperaturen werden in „Grad Fahrenheit“ (°F) statt in „Grad Celsius“ (°C) angegeben. Die Umrechnungen zwischen beiden ist aber recht einfach: ist x eine Temperatur in °C und y eine Temperatur in °F, so kann man die Umrechnungsformel

$$y = 1,8 x + 32 (*)$$

verwenden. Der Zusammenhang zwischen x und y wird also durch eine lineare Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = 1,8 x + 32$ beschrieben.

Nun interessiert aber oft nicht, wie man zu einer Celsius-Temperatur die zugehörige Fahrenheit-Temperatur berechnet. Sieht man z. B. einen Wetterbericht aus den USA, so wird die Temperatur dort in °F angegeben, und man würde gerne wissen, was das denn für eine Celsius-Temperatur ist!

1) Stellen Sie die Formel (*) nach x um.

Das Ergebnis ist wieder ein linearer (und damit eindeutiger) Zusammenhang zwischen x und y . Wir können also schreiben:

$$x = g(y) =$$

mit einer linearen Funktion g . Da diese Funktion genau das umgekehrte macht wie die Funktion f (statt eine Fahrenheit-Temperatur zu einer gegebenen Celsius-Temperatur zu berechnen, berechnet sie eine Celsius-Temperatur zu einer gegebenen Fahrenheit-Temperatur), nennt man sie die Umkehrfunktion zu f und schreibt statt g für sie f^{-1} (das bedeutet hier **nicht** dasselbe wie $1/f!$) oder \bar{f} (sprich: „f quer“).

Da es üblich ist, die Funktionsvariable x zu nennen und die Funktionswerte y , sollte man nun die Variablen noch umbenennen: x gibt nun die Temperatur in °F an, und y in °C. Damit ergibt sich:

Die Umkehrfunktion zu $f(x) = 1,8 x + 32$ ist $f^{-1}(x) =$

Im Folgenden sollen noch einige wichtige Eigenschaften von Umkehrfunktionen studiert werden.

2) Berechnen Sie $f^{-1}(f(x))$ (d. h., setzen Sie im Funktionsterm von f^{-1} für x den Funktionsterm von f ein und vereinfachen Sie das Ergebnis); berechnen Sie außerdem analog auch $f(f^{-1}(x))$. Warum muss dieses Ergebnis immer (für jede Funktion und ihre Umkehrfunktion), nicht nur in diesem speziellen Beispiel, so herauskommen?

3) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen von f und f^{-1} in dasselbe Koordinatensystem (Rückseite; x und y jeweils von -50 bis 100 , selber Maßstab auf beiden Achsen). Zeichnen Sie außerdem die erste Winkelhalbierende ein. Was fällt auf?

4) Speziell bei Umkehrfunktionen zu linearen Funktionen kann man noch eine andere allgemeine Aussage machen. Betrachten Sie eine allgemeine lineare Funktion

$$f(x) = m x + b$$

und berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} dazu (wie oben: $y = m x + b$ schreiben, dann x auflösen, Variablen umbenennen). Welche Steigung ergibt sich für die Umkehrfunktion?