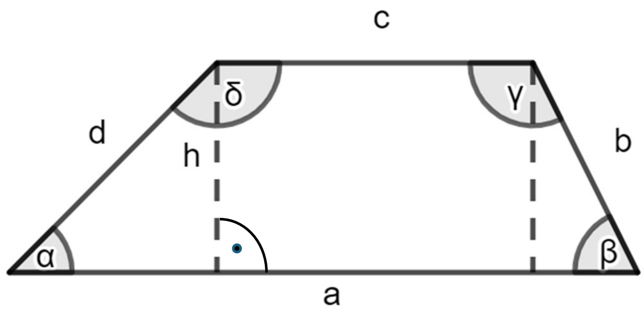
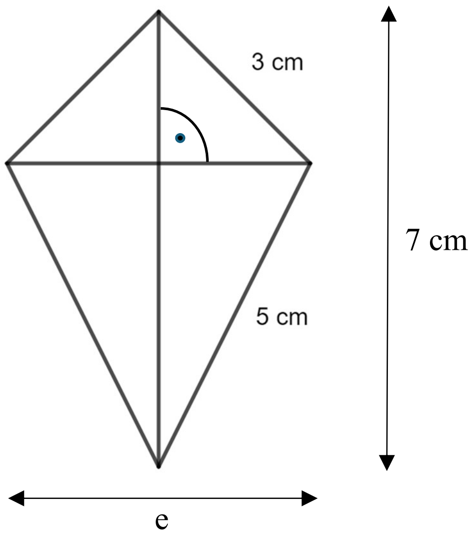
Aufgaben mit rechtwinkligen Dreiecken

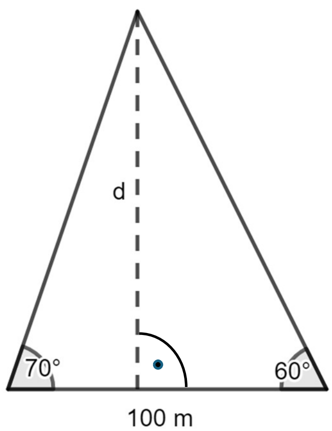
1. Von einem Trapez (siehe die nicht maßstäbliche Skizze unten) sind gegeben: $\alpha = 40°$, b = 3 cm, c = 5 cm, d = 4 cm. Berechnen Sie die Seitenlänge a, die Höhe h und die restlichen Winkel, jeweils gerundet auf zwei Dezimalen. Tragen Sie dabei in der Rechnung verwendete zusätzliche Winkel und/oder Längen in die Skizze mit ein.



2. Ein Drachenviereck hat die Seitenlängen a = 3 cm und b = 5 cm, die Länge der Diagonalen, zu der das Drachenviereck symmetrisch ist, beträgt d = 7 cm (siehe die nicht maßstäbliche Skizze unten). Berechnen Sie die Länge der zweiten Diagonalen e (diese schneidet d rechtwinklig) auf eine Dezimale genau. Tragen Sie dabei in der Rechnung verwendete zusätzliche Längen in die Skizze mit ein.



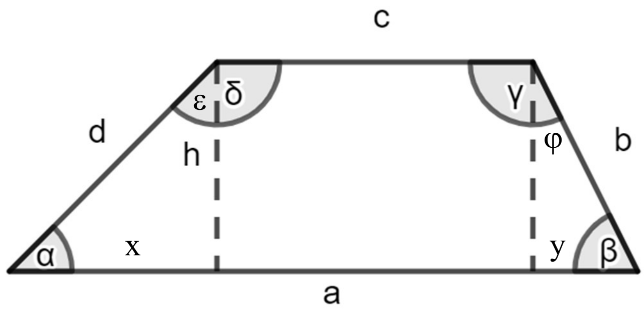
3. Um die Entfernung d eines Turmes zu bestimmen, wird eine Linie von 100 m Länge abgemessen, die senkrecht zur Abstandslinie verläuft. Von den beiden Enden der Linie aus sieht man den Turm unter einem Winkel von 70° bzw. 60° (siehe die nicht maßstäbliche Skizze unten). Berechnen Sie d, gerundet auf ganze Meter. Tragen Sie in der Rechnung dafür verwendete zusätzliche Winkel und/oder Längen in die Skizze mit ein.



Musterlösungen

(nur mögliche Lösungen, es gibt sicher auch andere Lösungswege!)

1. Die beiden Längen „links“ der linken Höhe h bzw. „rechts“ der rechten Höhe bezeichnet man z. N. mit x bzw. y, die beiden „Teilwinkel“ „links“ und „rechts“ der beiden Höhen z. B. mit ε und φ:



Dann hat man „links“ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Ankathete x und der Gegenkathete h zu α und der Hypotenuse d, außerdem „rechts“ ein ein rechtwinkliges Dreieck mit der Ankathete y und der Gegenkathete h zu β und der Hypotenuse d. Bekannt ist aber nur der Winkel α, also fängt man im „linken“ Dreieck an. Den fehlenden Winkel dort kann man schnell ausrechnen:

$$\varepsilon = 180° - 90° - \alpha = 90° - 40° = 50°$$

Außerdem ist in diesem Dreieck auch die Hypotenuse bekannt, also kann man Sinus und Cosinus verwenden:

$$\cos\alpha = \frac{x}{d} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{h}{d}$$

Das ergibt

$$x = d \cdot \cos\alpha = 4\,cm \cdot \cos 40° \approx 3{,}06\,cm; \quad h = d \cdot \sin\alpha = 4\,cm \cdot \sin 40° \approx 2{,}57\,cm$$

Im „rechten“ Dreieck ist nun die Gegenkathete h und die Hypotenuse bekannt, also kann man mit dem Satz von Pythagoras die Ankathete y berechnen und mit Sinus den Winkel β ....:

$$y = \sqrt{b^2 - h^2} \approx \sqrt{(3\,cm)^2 - (2{,}57\,cm)^2} \approx 1{,}55\,cm$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{b}\right) \approx \sin^{-1}\left(\frac{2{,}57\,cm}{3\,cm}\right) \approx 58{,}94°$$

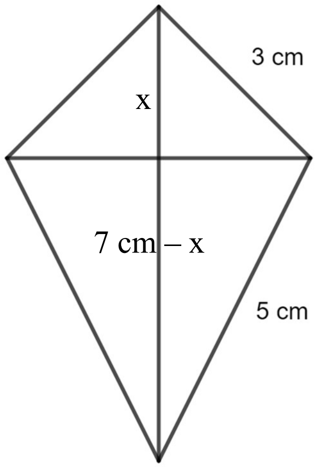
Damit ergibt sich sofort

$$\varphi = 180° - 90° - \beta \approx 90° - 58{,}94° = 31{,}06°$$

Die Winkel δ und γ sowie die Seitenlänge a erhält man dann einfach durch Addition:

$$\delta = \varepsilon + 90° = 140°; \quad \gamma = \varphi + 90° \approx 121{,}06°; \quad a = x + c + y \approx 9{,}61\,cm$$

2. Der Teil der Diagonalen d „oberhalb“ der Diagonalen e wird z. B. mit x bezeichnet; der Teil „unterhalb“ hat dann die Länge 7 cm – x.



Man hat dann „rechts oben“ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x und e/2 und der Hypotenuse 3 cm und „rechts unten“ noch ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 7 cm – x und e/2 und der Hypotenuse 5 cm. Für beide Dreiecke schreibt man nun jeweils den Satz von Pythagoras hin:

$$x^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = (3\ cm)^2 \ (I) \quad \text{und} \quad (7\ cm - x)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = (5\ cm)^2 \ \ (II)$$

Das ist nun ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten x und e. Wie üblich gibt es viele Möglichkeiten, dieses Gleichungssystem zu lösen. Man kann z- B. (II) – (I)rechnen; dann bleibt eine Gleichung übrig, die nur noch x enthält:

$$(7\ cm - x)^2 - x^2 = (5\ cm)^2 - (3\ cm)^2$$

Auf beiden Seiten werden nun die Klammern aufgelöst und zusammengefasst (links die binomische Formel nicht vergessen!):

$$49\ cm^2 - 14\ cm\ \cdot x = 16\ cm^2$$

Daraus kann man nun leicht x ausrechnen:

$$x = \frac{33}{14}\ cm$$

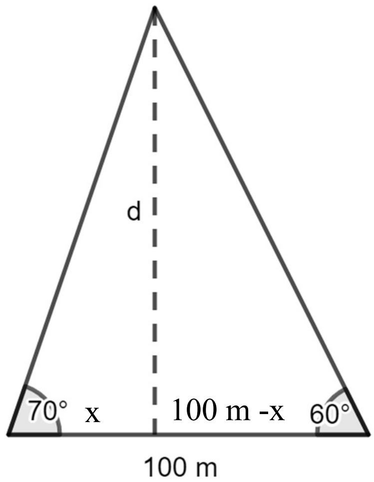
Das setzt man nun wieder oben ein, z. B. in Gleichung (I):

$$\left(\frac{33}{14}\ cm\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 = (3\ cm)^2$$

Nach e auflösen…

$$e = 2\sqrt{(3\ cm)^2 - \left(\frac{33}{14} cm\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{7} cm \approx 3{,}7\ cm$$

3. Den Teil der Linie „links“ von d nennt man z. B. x, dann ist die Länge „rechts“ gleich 100 m – x:



„Links“ hat man nun ein rechtwinkliges Dreieck mit der Gegenkathete d und der Ankathete x zum 70°-Winkel; „rechts“ hat man ein rechtwinkliges Dreieck mit der Gegenkathete und der Ankathete 100 m – x zum 60°-Winkel. Also kann man in beiden Dreiecken jeweils den Tangens verwenden:

$$\tan(70°) = \frac{d}{x} \quad \text{und} \quad \tan(60°) = \frac{d}{100\,m - x}$$

Das ist nun ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten x und d. Wie üblich gibt es viele Möglichkeiten, dieses Gleichungssystem zu lösen. Man kann z. B. beide Gleichungen erst mal jeweils mit dem Nenner multiplizieren:

$$x \cdot \tan(70°) = d \quad (I) \qquad \text{und} \qquad (100\,m - x) \cdot \tan(60°) = d \quad (II)$$

und dann gleichsetzen:

$$(I) = (II): \qquad x \cdot \tan(70°) = (100\,m - x) \cdot \tan(60°)$$

Damit bleibt nur noch eine Gleichung für x übrig. Nach x auflösen ergibt:

$$x = \frac{100\,m \cdot \tan(60°)}{\tan(70°) + \tan(60°)}$$

Das setzt man nun wieder oben ein, z. B. in Gleichung (I); das ergibt:

$$d = \frac{100\,m \cdot \tan(60°) \cdot \tan(70°)}{\tan(70°) + \tan(60°)} \approx 106\,m$$