Ganzrationale Funktionenscharen

1. Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f_a: x \mapsto x(x-2a)\ (x-a+1)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ einschließlich ihrer Vielfachheiten in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

2. *Aufgabe aus Prüfung 2016:*
   Gegeben sind die reellen Funktionen $h_t: x \mapsto \frac{1}{4}x(tx-1)(x+4)(x-3)$ mit $D_{h_t} = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen von h_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

3. *Musteraufgabe zum Lehrplan PLUS:*
   Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: x \mapsto -\frac{1}{4}(x-4)(x+2)(x^2-2x+2a)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.
   Bestimmen Sie alle Werte von a, für welche f_a jeweils genau zwei Nullstellen hat. (Beachten Sie: Diese können jeweils auch mehrfach sein!)

4. *Aufgabe aus Musterprüfung zum Lehrplan PLUS:*
   Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{1}{9}(x^4 - kx^2 - 9x^2 + 9k)$ mit $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f_k die Nullstellen $x_{1,2} = \pm 3$ hat, und bestimmen Sie für $k < 0$ die vollständig faktorisierte Darstellung von $f_k(x)$.

5. *Aufgabe aus Prüfungsnachtermin NT 2008:*
   Gegeben ist die reelle Funktion $f_k: x \mapsto -x^3 + (k-6)x^2 + (6k-9)x + 9k$ mit $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.
   Zeigen Sie, dass $x_1 = -3$ eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie den Term $f_k(x)$ vollständig in Faktoren. Ermitteln Sie dann Lage, Anzahl und Vielfachheiten der Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k; führen Sie dabei eine geeignete Fallunterscheidung durch.

6. *Aufgabe aus Prüfung 2019:*
   Gegeben ist die reelle Funktion $h_k: x \mapsto 2x^3 + 4kx^2 + 8x$ mit $D_{h_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Beurteilen Sie, ob folgende Aussage richtig ist: „Der Graph der Funktion h_k ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.‘‘

7. Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion $f_t: x \mapsto tx^3 + (t-1)x^2 - x$ mit $D_{f_t} = \mathbb{R}$ für $x \to \pm\infty$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.