Ganzrationale Funktionenscharen

1. Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f_a: x \mapsto x(x-2a)\,(x-a+1)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ einschließlich ihrer Vielfachheiten in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

2. *Aufgabe aus Prüfung 2016:*
   Gegeben sind die reellen Funktionen $h_t: x \mapsto \frac{1}{4}x(tx-1)(x+4)(x-3)$ mit $D_{h_t} = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen von h_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

3. *Musteraufgabe zum Lehrplan PLUS:*
   Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: x \mapsto -\frac{1}{4}(x-4)(x+2)(x^2-2x+2a)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Werte von a, für welche f_a jeweils genau zwei Nullstellen hat. (Beachten Sie: Diese können jeweils auch mehrfach sein!)

4. *Aufgabe aus Musterprüfung zum Lehrplan PLUS:*
   Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{1}{9}(x^4 - kx^2 - 9x^2 + 9k)$ mit $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f_k die Nullstellen $x_{1,2} = \pm 3$ hat, und bestimmen Sie für $k < 0$ die vollständig faktorisierte Darstellung von $f_k(x)$.

5. Ermitteln Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ drei Lösungen Lösungen hat.

6. *Aufgabe aus Prüfungsnachtermin NT 2008:*
   Gegeben ist die reelle Funktion $f_k: x \mapsto -x^3 + (k-6)x^2 + (6k-9)x + 9k$ mit $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $x_1 = -3$ eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie den Term $f_k(x)$ vollständig in Faktoren. Ermitteln Sie dann Lage, Anzahl und Vielfachheiten der Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k; führen Sie dabei eine geeignete Fallunterscheidung durch.

7. *Aufgabe aus Prüfung T 2020:*
   Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a: x \longmapsto \frac{1}{2}x^3 + 4a \cdot x^2 + 1$ und $g_a: x \longmapsto 1 - 4a \cdot x$ mit den Definitionsmengen $D_{f_a} = D_{g_a} = \mathbb{R}$ und dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie sämtliche Werte für a, für welche die Differenzfunktion $d_a: x \longmapsto f_a(x) - g_a(x)$ mit $D_{d_a} = \mathbb{R}$ eine doppelte Nullstelle besitzt. Geben Sie die Bedeutung dieser doppelten Nullstelle für die Lage der Graphen von f_a und g_a an.

8. *Aufgabe aus Prüfung 2019:*
   Gegeben ist die reelle Funktion $h_k: x \mapsto 2x^3 + 4kx^2 + 8x$ mit $D_{h_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Beurteilen Sie, ob folgende Aussage richtig ist: „Der Graph der Funktion h_k ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.‘‘

9. Ermitteln Sie das Verhalten der Funktion $f_t: x \mapsto tx^3 + (t-1)x^2 - x$ mit $D_{f_t} = \mathbb{R}$ für $x \to \pm\infty$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

Lösungen

1. $x(x-2a)\,(x-a+1)=0$ ➔ $x_1=0$; $x-2a=0$ ➔ $x_2=2a$; $x-a+1=0$ ➔ $x_3=a-1$
   1) $x_1=x_2$ ➔ $0=2a$ ➔ $a=0$: $x_{1,2}=0$ doppelt; $x_3=0-1=-1$ einfach
   2) $x_1=x_3$ ➔ $0=a-1$ ➔ $a=1$: $x_{1,3}=0$ doppelt; $x_2=2\cdot 1=2$ einfach
   3) $x_2=x_3$ ➔ $2a=a-1$ ➔ $a=-1$: $x_{2,3}=-2$ doppelt; $x_1=0$ einfach
   4) sonst (also $a\neq 0, a\neq 1, a\neq -1$): $x_1=0$; $x_2=2a$; $x_3=a-1$ alle einfach

2. $\frac{1}{4}x(tx-1)(x+4)(x-3)=0$ ➔ $x_1=0$; $tx-1=0$ ➔ $x_2=\frac{1}{t}$ $(t\neq 0\,!)$; $x+4=0$ ➔ $x_3=-4$; $x-3=0$ ➔ $x_4=3$
   1) $t=0$: $x_1=0$; $x_3=-4$; $x_4=3$ alle einfach *(x_2 existiert nicht)*
   2) $x_2=x_3$ ➔ $\frac{1}{t}=-4$ ➔ $t=-\frac{1}{4}$: $x_{2,3}=-4$ doppelt; $x_1=0$ und $x_4=3$ beide einfach
   3) $x_2=x_4$ ➔ $\frac{1}{t}=3$ ➔ $t=\frac{1}{3}$: $x_{2,4}=3$ doppelt; $x_1=0$ und $x_3=-4$ beide einfach
   4) sonst (also $t\neq 0, t\neq -\frac{1}{4}, t\neq \frac{1}{3}$): $x_1=0$; $x_2=\frac{1}{t}$; $x_3=-4$; $x_4=3$ alle einfach
   (5) $x_1=x_2$ ➔ $0=\frac{1}{t}$ kann nicht vorkommen!)

3. $-\frac{1}{4}(x-4)(x+2)(x^2-2x+2a)=0$ ➔ $x_1=4$; $x_2=-2$ oder $x^2-2x+2a=0$
   Zwei Nullstellen haben wir schon gefunden. Damit es genau zwei Nullstellen gibt, darf die Funktion also keine anderen Nullstellen haben. Dabei müssen wir aber beachten, dass diese beiden Nullstellen unterschiedliche Vielfachheiten haben können!
   1) $x_1=4$; $x_2=-2$ beide einfach, ansonsten keine Nullstellen ➔ $x^2-2x+2a=0$ darf keine Lösungen haben ➔ $D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2a<0$ ➔ $4-8a<0$ ➔ $-8a<-4$ ➔ $a>0{,}5$
   2) $x_1=4$ oder $x_2=-2$ ist doppelt (oder beide) ➔ $x^2-2x+2a=0$ darf nur die Lösung $x_1=4$ oder $x_2=-2$ haben (oder beide)
      Das überprüft man am einfachsten, indem man die beiden x-Werte in die Gleichung einsetzt:
      $4^2-2\cdot 4+2a=0$ ➔ $16-8+2a=0$ ➔ $8+2a=0$ ➔ $2a=-8$ ➔ $a=-4$
      $(-2)^2-2\cdot(-2)+2a=0$ ➔ $4+4+2a=0$ ➔ $8+2a=0$ ➔ $2a=-8$ ➔ $a=-4$
      Beide Möglichkeiten führen also auf dasselbe Ergebnis.
   Insgesamt: Die Funktion hat genau dann nur genau zwei Nullstellen, wenn $a>0{,}5$ ist oder $a=-4$ ist.

4. Zeigen, dass $x_{1,2}=\pm 3$ Nullstellen sind: einfach einsetzen! Wegen der Symmetrie (im Funktionsterm kommen nur gerade Exponenten von x vor) kann man sogar beide auf einmal einsetzen:
   $f_k(\pm 3)=\frac{1}{9}((\pm 3)^4-k\cdot(\pm 3)^2-9\cdot(\pm 3)^2+9k)=\frac{1}{9}(81-9k-9\cdot 9+9k)=0.$ Passt.

Faktorisieren:
   a) umständlich: mithilfe von Substitution
   $u=x^2$ ➔ $\frac{1}{9}(u^2-ku-9u+9k)=0$ ➔ $u^2-(k+9)u+9k=0$
   a1) am umständlichsten: diese Gleichung mit der Mitternachtsformel lösen
   $u_{1,2}=\frac{(k+9)\pm\sqrt{(k+9)^2-4\cdot 1\cdot 9k}}{2\cdot 1}=\frac{(k+9)\pm\sqrt{k^2+18k+81-36k}}{2}=\frac{(k+9)\pm\sqrt{k^2-18k+81}}{2}=\frac{(k+9)\pm\sqrt{(k-9)^2}}{2}=\frac{(k+9)\pm(k-9)}{2}$
   ➔ $u_1=\frac{(k+9)+(k-9)}{2}=\frac{2k}{2}=k$; $u_2=\frac{(k+9)-(k-9)}{2}=\frac{18}{2}=9$
   a2) oder deutlich schneller mit dem Satz von Vieta: $u_1+u_2=k+9$; $u_1\cdot u_2=9k$ ➔ $u_1=k; u_2=9$
   Resubstitution: 1) $x^2=k$ ➔ keine Lösung, weil laut Angabe $k<0$!
   2) $x^2=9$ ➔ $x_{1,2}=\pm 3$
   Man hat also nur genau die beiden Nullstellen gefunden, die sowieso schon in der Angabe vorgegeben waren… die Substitution kann trotzdem bei der Faktorisierung helfen, indem man erst mal den quadratischen Term faktorisiert: $f_k(x)=\frac{1}{9}(x^4-kx^2-9x^2+9k)=\frac{1}{9}(u^2-(k+9)u+9k)$
   $=\frac{1}{9}(u-k)(u-9)=\frac{1}{9}(x^2-k)(x^2-9)=\frac{1}{9}(x^2-k)(x+3)(x-3)$
   Den zweiten Faktor kann man hier mit der 3. binomischen Formel faktorisieren, den ersten nicht ($k<0$!).

oder b) etwas weniger umständlich: mit Polynomdivision

b_1) beide gegebene Nullstellen einzeln verwenden, z. B. erst $x_1 = -3$, dann $x_2 = 3$:

$(x^4 - kx^2 - 9x^2 + 9k) : (x+3) = x^3 - 3x^2 - kx + 3k$

$(x^3 - 3x^2 - kx + 3k) : (x-3) = x^2 - k$

also insgesamt: $f_k(x) : (x+3) : (x-3) = \frac{1}{9}(x^2 - k)$ ➔ $f_k(x) = \frac{1}{9}(x^2 - k)(x+3)(x-3)$

b_2) oder beide Divisionen auf einmal (mithilfe der 3. binomischen Formel):

$f_k(x) : (x+3) : (x-3) = f_k(x) : \big((x+3)\cdot(x-3)\big) = f_k(x) : (x^2 - 9)$

$(x^4 - kx^2 - 9x^2 + 9k) : (x^2 - 9) = x^2 - k$ ➔ $f_k(x) = \frac{1}{9}(x^2 - k)(x+3)(x-3)$

5. $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$

durch Probieren: $x_1 = -1$

$(x^3 + ax^2 + ax + 1) : (x+1) = x^2 + (a-1)x + 1$

Damit die ursprüngliche Gleichung drei Lösungen hat, muss also die Gleichung $x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ zwei Lösungen haben. Diese müssen aber nicht alle unbedingt unterschiedlich sein, doppelte (und sogar dreifache) Lösungen sind auch zugelassen. ➔ $D = (a-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \geq 0$

a) lösen auf übliche Weise: $a^2 - 2a + 1 - 4 \geq 0$ ➔ $a^2 - 2a - 3 \geq 0$

Gleichung lösen: $a^2 - 2a - 3 = 0$ ➔ $a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$ ➔ $a_1 = -1$; $a_2 = 3$

Skizze von D ➔ $D \geq 0$ für $a \leq -1$ oder $a \geq 3$

b) oder schneller und eleganter: $(a-1)^2 - 4 \geq 0$ ➔ $(a-1)^2 \geq 4$

auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und dabei beachten, dass $\sqrt{x^2} = |x|$ ist ➔ $|a - 1| \geq 2$

$|a - 1|$ ist aber nichts anderes als der Abstand der Zahl a zur Zahl 1. Dieser Abstand soll mindestens gleich 2 sein. Wie man entweder direkt im Kopf oder an einer Skizze (Zahlenstrahl) sieht, ist das nur erfüllt, wenn $a \leq -1$ oder $a \geq 3$ ist.

6. Zeigen, dass $x_1 = -3$ eine Nullstelle ist: einfach einsetzen!

$f_k(-3) = -(-3)^3 + (k-6)\cdot(-3)^2 + (6k-9)\cdot(-3) + 9k$

$= 27 + 9k - 54 - 18k + 27 + 9k = 0.$ Passt.

Faktorisieren: mithilfe von Polynomdivision

$(-x^3 + (k-6)x^2 + (6k-9)x + 9k) : (x+3) = -x^2 + (k-3)x + 3k$

➔ $-x^2 + (k-3)x + 3k = 0$

mit Mitternachtsformel oder Satz von Vieta: $x_2 = x_1 = -3$; $x_3 = k$

➔ $f_k(x) = -(x+3)^2(x-k)$

1) $k = -3$: eine Nullstelle: $x_{1,2,3} = -3$ dreifach

2) $k \neq -3$: zwei Nullstellen: $x_{1,2} = -3$ doppelt; $x_3 = k$ einfach

7. Nullstellen der Differenzfunktion:

$d_a(x) = 0$ ➔ $f_a(x) - g_a(x) = 0$ ➔ $\frac{1}{2}x^3 + 4a \cdot x^2 + 1 - (1 - 4a \cdot x) = 0$

➔ $\frac{1}{2}x^3 + 4ax^2 + 4ax = 0$ (*) ➔ $\frac{1}{2}x(x^2 + 8ax + 8a) = 0$ ➔ $x_1 = 0$ oder $x^2 + 8ax + 4a = 0$

Damit es eine doppelte Nullstelle gibt, muss entweder die quadratische Gleichung eine doppelte Lösung $x_{2,3}$ haben, also ihre Diskriminante gleich 0 sein – oder die quadratische Gleichung muss die (einfache!) Lösung $x_2 = 0$ haben.

zunächst die erste Möglichkeit: $D = (8a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8a = 64a^2 - 32a = 64a\,(a - 0{,}5)$

$64a\,(a - 0{,}5) = 0$ ➔ a = 0 oder a = 0,5

Für a = 0 wird aber die ursprüngliche Gleichung (*) zu $\frac{1}{2}x^3 = 0$, und damit hat man dann eine *dreifache* Lösung statt einer doppelten, diesen Fall können wir also ausschließen. Zum selben Ergebnis kommen wir, wenn wir versuchen, dass die quadratische Gleichung die einfache Lösung $x_2 = 0$ hat: einsetzen führt auf a = 0, was ja eben nicht funktioniert. Also bleibt als einzige Möglichkeit a = 0,5 übrig.

Bedeutung dieser doppelten Nullstelle für die Lage der Graphen von f_a und g_a: Dort berühren sich die beiden Graphen.

8. Die Aussage ist zwar für *fast* alle Werte von k richtig, aber eben nicht wirklich für *alle* Werte von k: Für $k \neq 0$ kommen im Funktionsterm gerade und ungerade Potenzen von x vor, der Graph ist dann also tatsächlich weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Im speziellen Fall k = 0 ist aber $h_0(x) = 2x^3 + 8x$, im Funktionsterm kommen also nur ungerade Potenzen von x vor, und damit ist der Graph symmetrisch zum Ursprung.

9. 1) $t > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_t(x) = +\infty$ (Grad ungerade, LK positiv)
   2) $t < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_t(x) = -\infty$ (Grad ungerade, LK negativ)
   3) $t = 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = -\infty$ (Grad gerade, LK negativ: $f_0(x) = -x^2 - x$)