Übungen zum Newton-Verfahren

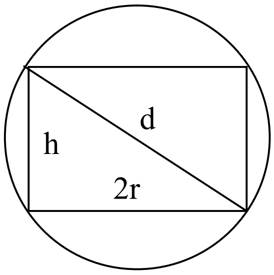
1. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren näherungsweise die Lösungen der folgenden Gleichungen. Beginnen Sie mit dem Startwert x_1 und führen Sie jeweils zwei Näherungsschritte durch.

a) $x^3 + x - 1 = 0, \quad x_1 = 0{,}5$ b) $x^3 - 4x + 2 = 0, \quad x_1 = 1 \ (x_1 = -1)$

c) $x^3 + 3x = 6, \quad x_1 = 1$ d) $\sqrt{x-1} = x^2 - 2, \quad x_1 = 1 \ (x_1 = 2)$

2. Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren eine Extremstelle der Funktion f: $x \mapsto 0{,}5x^4 + 1{,}5x^2 - x + 5$ auf zwei Dezimalen genau. (Startwert: $x_1 = 0$)

3. Eine Kugel mit Durchmesser $d = 18$ (cm) soll so bearbeitet werden, dass ein Zylinder (Höhe h, Radius r) übrig bleibt (siehe Skizze unten), dessen Volumen 25% des Kugelvolumens beträgt. Bestimmen Sie die Höhe dieses Zylinders auf zwei Dezimalen genau (Startwert: $h_1 = 3$).



4. Welches Problem ergibt sich, wenn man das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_1 = 1$ zum Lösen der Gleichung $x^3 - 5x = 0$ anzuwenden versucht?

5. Zeige: Wenn man das Newton-Verfahren anwendet, um die Gleichung $x^2 = a$ zu lösen, ergibt sich die Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

(Anmerkung: Dieses Verfahren, um näherungsweise $\sqrt{a}$ zu berechnen, wurde bereits ca. 1750 v. Chr. in Mesopotamien verwendet. Der griechische Mathematiker und Ingenieur Heron von Alexandria machte es im 1. Jahrhundert nach Christus dann aber im ganzen römischen Reich bekannt; deshalb nennt man es heute das *Heron-Verfahren*.)