

Übungen zu Kurvenscharen

1. Gegeben ist die Geradenschar $g_t: y = \frac{1}{3}(t^2-3) \cdot (x-t) + \frac{1}{9}(t^2-9)$ mit

$\mathbb{D}(g_t) = \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

- Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g_0 und g_3 in ein Koordinatensystem.
- Geben Sie die Schnittpunkte des Graphen von g_3 mit den Koordinatenachsen an.
- Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen von g_0 und g_3 .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Graphen von g_0 , g_3 und der y-Achse eingeschlossen wird.

2. Gegeben ist eine Geradenschar durch den Term $g_t(x) = -2tx + t^2 + 1$ mit $\mathbb{D}(g_t) = \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

- Geben Sie die y-Achsenabschnitte in Abhängigkeit von t an.
- Geben Sie die Nullstellen der Funktion in Abhängigkeit von t an.
- Für welche Werte von t ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse $P(0|5)$?
- Zeichnen Sie die Graphen der Funktion g_{-1} und g_1 in ein Koordinatensystem.
- Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen von g_{-1} und g_1 .

3. Gegeben ist die Funktionenschar g_m durch den Term $g_m(x) = mx + 2 - m$ mit $\mathbb{D}(g_m) = \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$.

- Zeichnen Sie $G(g_0)$, $G(g_2)$ und $G(g_{-1})$ in dasselbe Koordinatensystem.
- Berechnen Sie den Schnittpunkt von $G(g_{-2})$ und $G(g_1)$.
- Begründen Sie, dass der Punkt $P(1|2)$ auf allen Kurven der Schar liegt.

4. Gegeben ist die Geradenschar $f_t: x \mapsto \frac{tx + t \cdot (t-4)}{2t-4}$ mit $\mathbb{D}(f_t) = \mathbb{R}, t \in [0;4] \setminus \{2\}$

und außerdem die Gerade f_2 mit der Gleichung $x = 2$.

- Zeichnen Sie $G(f_1)$, $G(f_2)$, $G(f_3)$ und die 1. Winkelhalbierende in dasselbe Koordinatensystem.
- Berechnen Sie für $G(f_1)$, $G(f_2)$ und $G(f_3)$ jeweils die Nullstellen und die Schnittpunkte mit der 1. Winkelhalbierenden.
- Berechnen Sie die Flächeninhalte A_1 , A_2 bzw. A_3 der drei Dreiecke, die jeweils von $G(f_1)$, $G(f_2)$, bzw. $G(f_3)$, der x-Achse und der 1. Winkelhalbierenden eingeschlossen werden.
- Berechnen Sie allgemein für $G(f_t)$ die Nullstelle, den Schnittpunkt mit der 1. Winkelhalbierenden und den Flächeninhalt A_t des Dreiecks, das von $G(f_t)$, der x-Achse und der 1. Winkelhalbierenden eingeschlossen wird.
- Berechnen Sie, für welche Werte von t dieser Flächeninhalt Null wird, und für welchen Wert von t der Flächeninhalt maximal wird.

5. Gegeben sind die Funktionenscharen mit folgenden Funktionstermen:

- $f_k(x) = (x-1)^2 + k$ mit $\mathbb{D}(f_k) = \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$
- $f_a(x) = (x-a)^2 + 2$ mit $\mathbb{D}(f_a) = \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$
- $f_t(x) = \frac{1}{t}(x-1)^2 + 2$ mit $\mathbb{D}(f_t) = \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

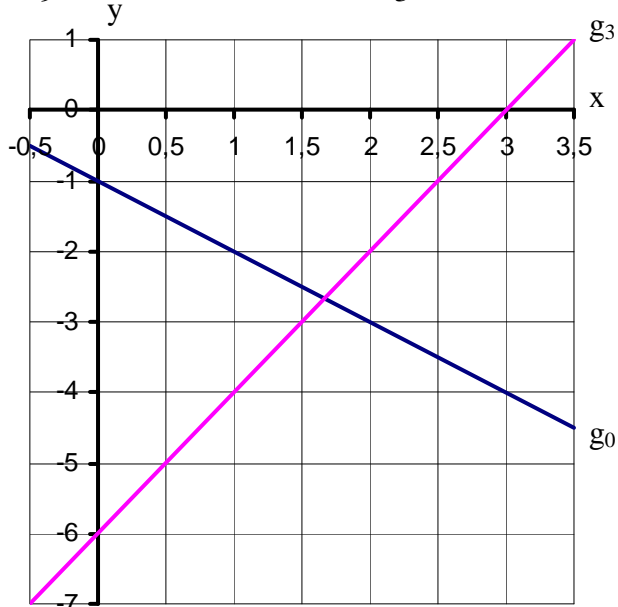
Zeichnen Sie jeweils $G(f_1)$, $G(f_2)$ und $G(f_{-1})$ in dasselbe Koordinatensystem. Berechnen Sie dann allgemein die Nullstellen und den Scheitelpunkt. Untersuchen Sie außerdem, für welche Werte des Scharparameters es eventuell nur eine oder keine Nullstelle gibt.

6. Durch $f_k(x) = x^2 + kx - k$ ($k \in \mathbb{R}$) ist eine Funktionenschar gegeben mit $\mathbb{D}(f_k) = \mathbb{R}$.

- Zeichnen Sie $G(f_0)$, $G(f_1)$, $G(f_{-1})$ und $G(f_{-2})$ in dasselbe Koordinatensystem.
- Berechnen Sie die gemeinsamen Punkte von $G(f_k)$ mit der x-Achse. Für welche Werte von k schneidet $G(f_k)$ die x-Achse, für welche Werte berührt $G(f_k)$ die x-Achse nur?
- Ermitteln Sie den Scheitelpunkt von $G(f_k)$ in Abhängigkeit von k .

Lösungen

1. a) $g_0(x) = \frac{1}{3}(0^2-3) \cdot (x-0) + \frac{1}{9}(0^2-9) = -x-1$; $g_3(x) = \frac{1}{3}(3^2-3) \cdot (x-3) + \frac{1}{9}(3^2-9) = 2(x-3) = 2x-6$



b) aus der Zeichnung: $S_{x\text{-Achse}}(3|0)$; $S_{y\text{-Achse}}(0|-6)$

oder berechnen: $x\text{-Achse: } y = g_3(x) = 0$, also $2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$; $y\text{-Achse: } x = 0$; $y = g_3(0) = -6$

c) $g_0(x) = g_3(x) \rightarrow -x - 1 = 2x - 6 \rightarrow -3x = -5 \rightarrow x = 5/3$; $y = g_0(5/3) = -5/3 - 1 = -8/3 \rightarrow S(5/3|-8/3)$

d) $A = 0,5$ g h mit $g = 5$ (auf $y\text{-Achse}$), $h = 5/3$ (Abstand von S zur $y\text{-Achse}$) $\rightarrow A = 0,5 \cdot 5 \cdot 5/3 = 25/6$

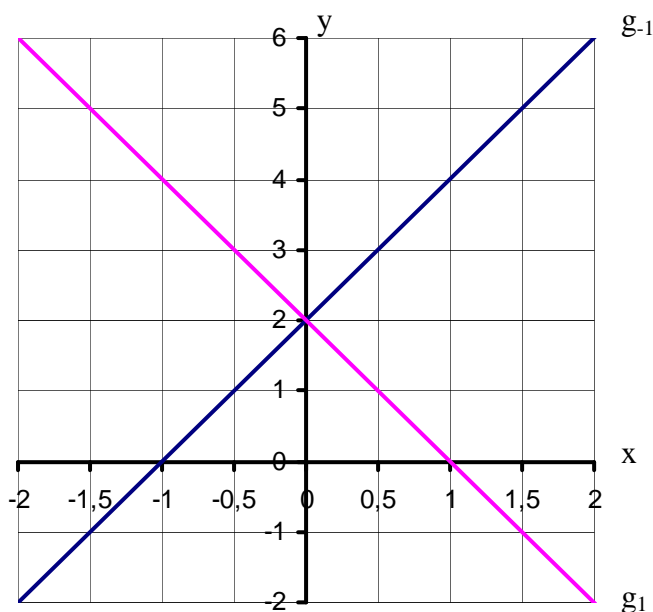
2. $g_t(x) = -2tx + t^2 + 1$

a) $b_t = t^2 + 1$

b) $y = g_t(x) = 0 \rightarrow -2tx + t^2 + 1 = 0 \rightarrow -2tx = -t^2 - 1 \rightarrow x = \frac{-t^2 - 1}{-2t} = \frac{t^2 + 1}{2t}$

c) Schnittpunkt mit $y\text{-Achse}$ ist $P(0|5) \rightarrow y\text{-Achsenabschnitt}$ ist 5, also $t^2 + 1 = 5 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t_{1,2} = \pm 2$

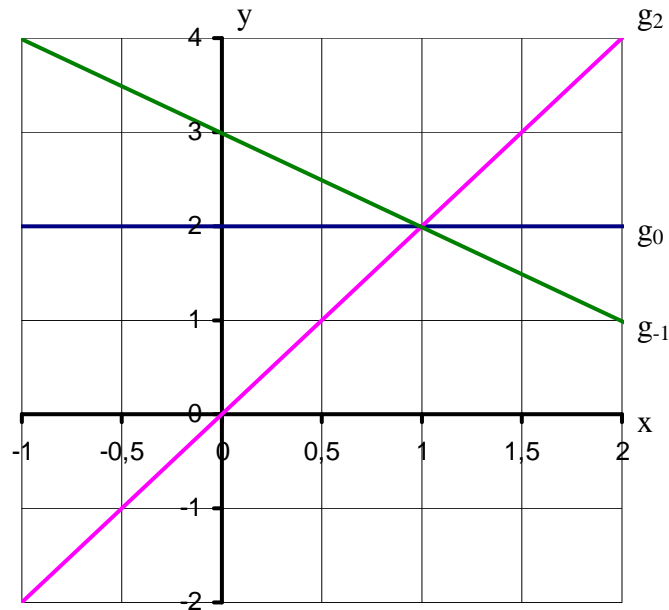
d) $g_{-1}(x) = 2x + 2$; $g_1(x) = -2x + 2$



e) $g_{-1}(x) = g_1(x) \rightarrow 2x + 2 = -2x + 2 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$; $y = g_1(0) = 2 \rightarrow S(0|2)$

3. $g_m(x) = mx + 2 - m$

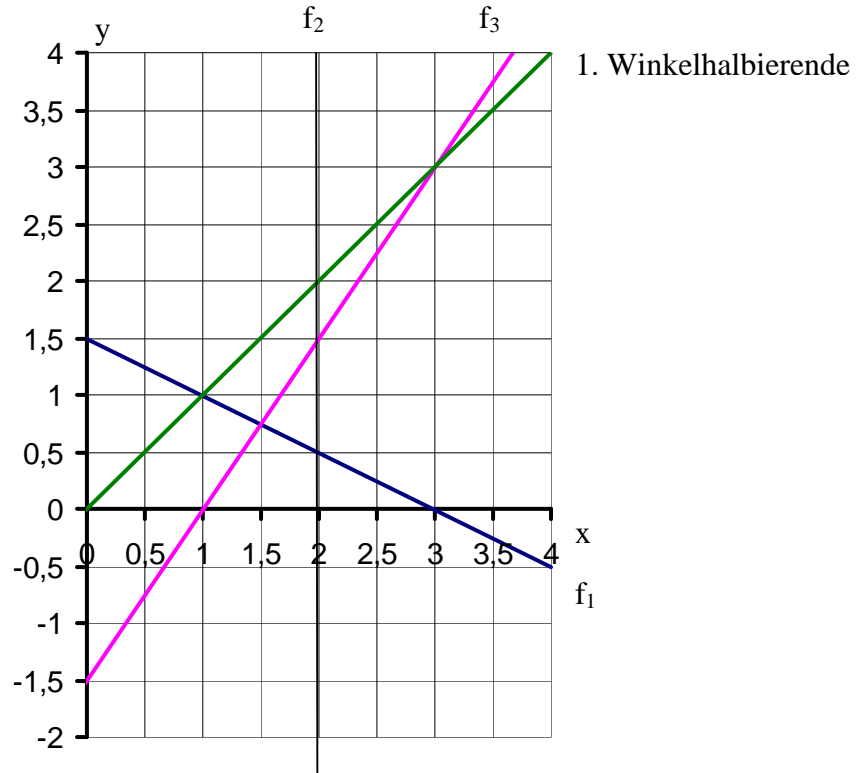
a) $g_0(x) = 2$; $g_2(x) = 2x$; $g_{-1}(x) = -x + 3$



b) $g_{-2}(x) = g_1(x) \rightarrow -2x + 4 = x + 1 \rightarrow -3x = -3 \rightarrow x = 1$; $y = g_1(1) = 2 \rightarrow S(1|2)$

c) P einsetzen: $2 = m \cdot 1 + 2 - m$, also $2 = m + 2 - m$, also $2 = 2$; wahre Aussage, unabhängig von m
 oder: $g_m(1) = m \cdot 1 + 2 - m = m + 2 - m = 2$, unabhängig von m

4. a) $f_1(x) = \frac{x+1 \cdot (-3)}{2-4} = \frac{x-3}{-2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; $f_2: x = 2$; $f_3(x) = \frac{3x+3 \cdot (-1)}{2 \cdot 3 - 4} = \frac{3x-3}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$



b) Nullstellen: $f_1(x) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}x = -\frac{3}{2} \rightarrow x = 3$

$f_2(x) = 0$ geht nicht, da f_2 keine Funktion ist; $x = 2$ kann aber direkt abgelesen werden

$f_3(x) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \rightarrow x = 1$

Schnittpunkte mit der 1. Winkelhalbierenden ($y = x$):

$$f_1(x) = x \rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x \rightarrow x = 1; f_1(1) = 1 \rightarrow S_1(1|1)$$

$$f_2: x = 2 \rightarrow y = 2 \rightarrow S_2(2|2)$$

$$f_3(x) = x \rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = x \rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x \rightarrow x = 3; f_3(3) = 3 \rightarrow S_3(3|3)$$

$$c) A_1 = 0,5 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5; A_2 = 0,5 \cdot 2 \cdot 2 = 2; A_3 = 0,5 \cdot 1 \cdot 3 = 1,5 \quad (\text{vgl. Teil d})$$

$$d) \text{ Nullstelle: } f_t(x) = 0 \rightarrow \frac{tx + t \cdot (t-4)}{2t-4} = 0 \rightarrow tx + t \cdot (t-4) = 0 \rightarrow tx = -t \cdot (t-4) \rightarrow x = -(t-4) = 4-t$$

$$\text{Schnittpunkt mit der 1. Winkelhalbierenden: } f_t(x) = x \rightarrow \frac{tx + t \cdot (t-4)}{2t-4} = x \rightarrow tx + t \cdot (t-4) = (2t-4)x$$

$$\rightarrow tx - (2t-4)x + t \cdot (t-4) = 0 \rightarrow (-t+4)x = -t \cdot (t-4) \rightarrow x = t$$

$$f_t(t) = \frac{t \cdot t + t \cdot (t-4)}{2t-4} = \frac{t^2 + t^2 - 4t}{2t-4} = \frac{2t^2 - 4t}{2t-4} = \frac{t \cdot (2t-4)}{2t-4} = t \rightarrow S_t(t|t)$$

Flächeninhalt Dreieck: $A = 0,5 g h$

$g = 4 - t$ (auf x-Achse von Ursprung bis Nullstelle); $h = t$ (von x-Achse bis zum Schnittpunkt)

$$\rightarrow A(t) = 0,5 \cdot (4-t) \cdot t = 0,5t \cdot (-t+4) = -0,5t^2 + 2t$$

$$e) A(t) = 0 \rightarrow -0,5t^2 + 2t = 0 \rightarrow 0,5t \cdot (-t+4) = 0 \rightarrow t_1 = 0; t_2 = 4$$

für maximalen Flächeninhalt: $A(t)$ in Scheitelform bringen

$$A(t) = -0,5(t^2 - 4t) = -0,5(t^2 - 4t + 2^2 - 2^2) = -0,5((t-2)^2 - 4) = -0,5(t-2)^2 + 2 \rightarrow S(2|2)$$

Der Flächeninhalt wird maximal (nämlich 2) für $t = 2$.

$$5. a) \text{ Nullstellen: } f_k(x) = 0 \rightarrow (x-1)^2 + k = 0 \rightarrow (x-1)^2 = -k \rightarrow x-1 = \pm\sqrt{-k} \rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-k}$$

Es gibt also nur Lösungen, wenn $-k$ positiv oder null ist (sonst kann man die Wurzel nicht ziehen!), also wenn k negativ oder null ist. Also: $k < 0$: zwei Nullstellen; $k = 0$: eine Nullstelle; $k > 0$: keine Nullstelle.

Scheitelpunkt ablesen: $S_k(1|k)$

$$b) \text{ Nullstellen: } f_a(x) = 0 \rightarrow (x-a)^2 + 2 = 0 \rightarrow (x-a)^2 = -2$$

Aus -2 kann man keine Wurzel ziehen \rightarrow für keinen Wert von a gibt es Nullstellen.

Scheitelpunkt ablesen: $S_a(a|2)$

$$c) \text{ Nullstellen: } f_t(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{t}(x-1)^2 + 2 = 0 \rightarrow \frac{1}{t}(x-1)^2 = -2 \rightarrow (x-1)^2 = -2t \rightarrow x-1 = \pm\sqrt{-2t}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-2t}$$

wie in Teil a): $t < 0$: zwei Nullstellen; $t > 0$: keine Nullstelle ($t = 0$ ist hier ausgeschlossen!)

Scheitelpunkt ablesen: $S_t(1|2)$ (unabhängig von t)

$$6. b) \text{ gem. Punkte mit der x-Achse: } f_k(x) = 0 \rightarrow x^2 + kx - k = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k)}}{2 \cdot 1} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$$

Graph berührt x-Achse nur, wenn es nur eine Nullstelle gibt, also wenn die Diskriminante $= 0$ ist

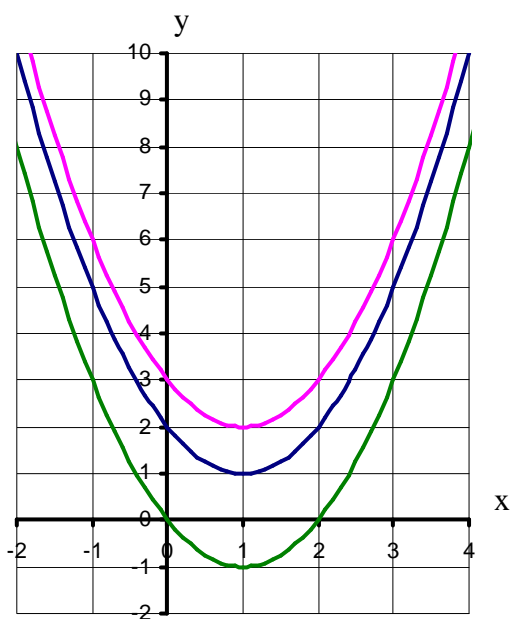
$$\rightarrow k^2 + 4k = 0 \rightarrow k(k+4) = 0 \rightarrow k_1 = 0; k_2 = -4$$

Graph schneidet die x-Achse, wenn es zwei Nullstellen gibt, also wenn die Diskriminante > 0 ist

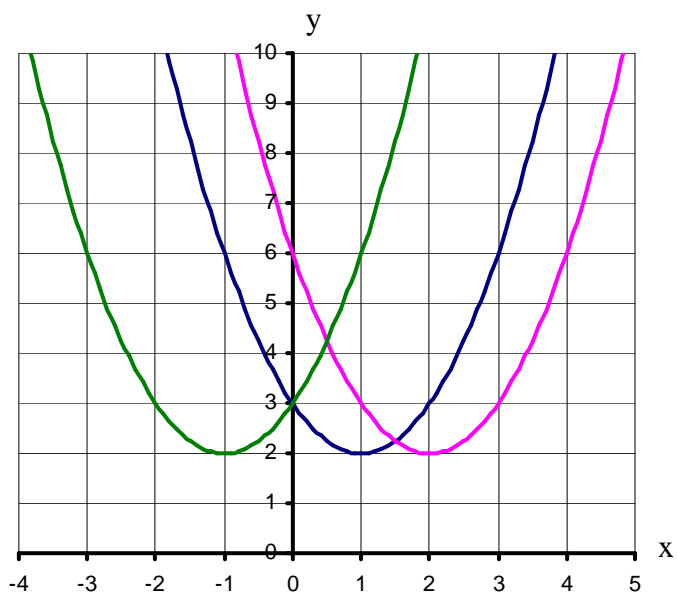
$$\rightarrow k^2 + 4k > 0; \text{ zugehörige Parabel skizzieren..... } k < -4 \text{ oder } k > 0$$

$$c) f_k(x) = x^2 + kx - k = x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} - k \rightarrow S_k\left(-\frac{k}{2} \mid -\frac{k^2}{4} - k\right)$$

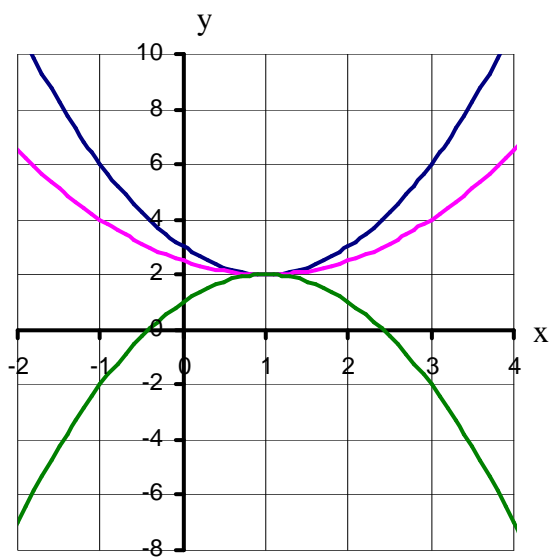
5. a)



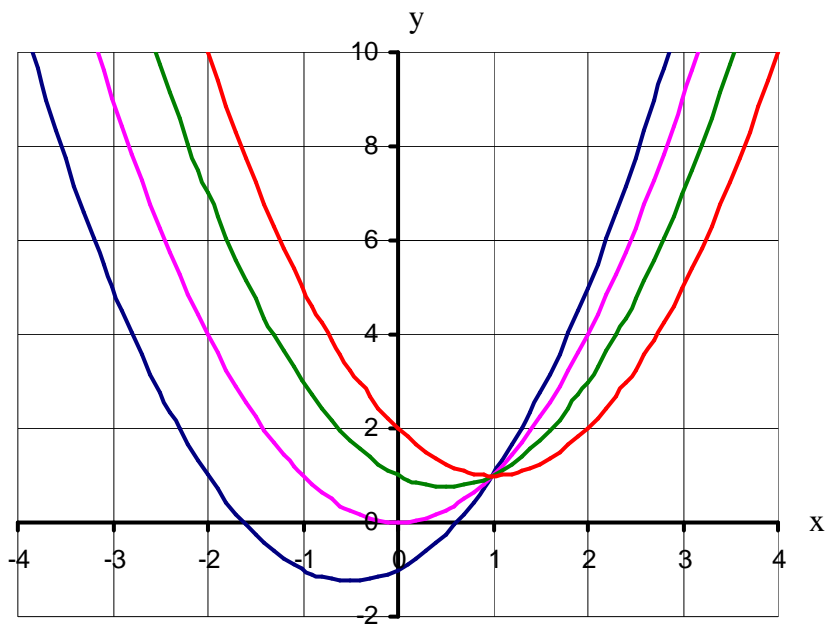
b)



c)



6. a) mit den Ergebnissen aus Teil c): $S_0(0|0)$; $S_1(-0,5|-1,25)$; $S_{-1}(0,5|0,75)$; $S_{-2}(1|1)$; alles Normalparabeln



von links nach rechts: Graphen von f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}