Übungen zu Kurvenscharen

1. Gegeben ist die Geradenschar g_t: $y = \frac{1}{3}(t^2-3)\cdot(x-t) + \frac{1}{9}(t^2-9)$ mit $\mathbb{D}(g_t) = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
   a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g_0 und g_3 in ein Koordinatensystem.
   b) Geben Sie die Schnittpunkte des Graphen von g_3 mit den Koordinatenachsen an.
   c) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen von g_0 und g_3.
   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Graphen von g_0, g_3 und der y-Achse eingeschlossen wird.

2. Gegeben ist eine Geradenschar durch den Term $g_t(x) = -2tx + t^2 + 1$ mit $\mathbb{D}(g_t) = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.
   a) Geben Sie die y-Achsenabschnitte in Abhängigkeit von t an.
   b) Geben Sie die Nullstellen der Funktion in Abhängigkeit von t an.
   c) Für welche Werte von t ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse P(0|5)?
   d) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion g_{-1} und g_1 in ein Koordinatensystem.
   e) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Graphen von g_{-1} und g_1.

3. Gegeben ist die Funktionenschar g_m durch den Term $g_m(x) = mx + 2 - m$ mit $\mathbb{D}(g_m) = \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.
   a) Zeichnen Sie $G(g_0)$, $G(g_2)$ und $G(g_{-1})$ in dasselbe Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von $G(g_{-2})$ und $G(g_1)$.
   c) Begründen Sie, dass der Punkt P(1|2) auf allen Kurven der Schar liegt.

4. Gegeben ist die Geradenschar f_t: $x \mapsto \frac{tx + t\cdot(t-4)}{2t-4}$ mit $\mathbb{D}(f_t) = \mathbb{R}$, $t \in [0;4]\backslash\{2\}$
   und außerdem die Gerade f_2 mit der Gleichung $x = 2$.
a) Zeichnen Sie $G(f_1)$, $G(f_2)$, $G(f_3)$ und die 1. Winkelhalbierende in dasselbe Koordinatensystem.
b) Berechnen Sie für $G(f_1)$, $G(f_2)$ und $G(f_3)$ jeweils die Nullstellen und die Schnittpunkte mit der 1. Winkelhalbierenden.
c) Berechnen Sie die Flächeninhalte A_1, A_2 bzw. A_3 der drei Dreiecke, die jeweils von $G(f_1)$, $G(f_2)$, bzw. $G(f_3)$, der x-Achse und der 1. Winkelhalbierenden eingeschlossen werden.
d) Berechnen Sie allgemein für $G(f_t)$ die Nullstelle, den Schnittpunkt mit der 1. Winkelhalbierenden und den Flächeninhalt A_t des Dreiecks, das von $G(f_t)$, der x-Achse und der 1. Winkelhalbierenden eingeschlossen wird.
e) Berechnen Sie, für welche Werte von t dieser Flächeninhalt Null wird, und für welchen Wert von t der Flächeninhalt maximal wird.

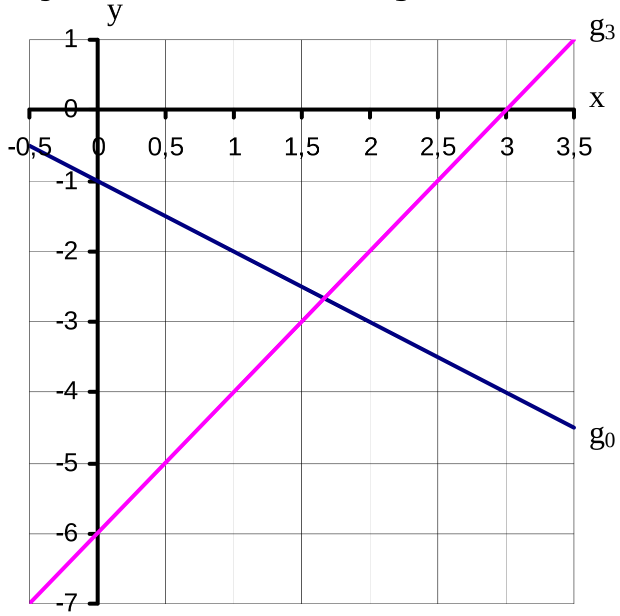
5. Gegeben sind die Funktionenscharen mit folgenden Funktionstermen:
   a) $f_k(x) = (x-1)^2 + k$ mit $\mathbb{D}(f_k) = \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$
   b) $f_a(x) = (x-a)^2 + 2$ mit $\mathbb{D}(f_a) = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$
   c) $f_t(x) = \frac{1}{t}(x-1)^2 + 2$ mit $\mathbb{D}(f_t) = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

   Zeichnen Sie jeweils $G(f_1)$, $G(f_2)$ und $G(f_{-1})$ in dasselbe Koordinatensystem. Berechnen Sie dann allgemein die Nullstellen und den Scheitelpunkt. Untersuchen Sie außerdem, für welche Werte des Scharparameters es eventuell nur eine oder keine Nullstelle gibt.

6. Durch $f_k(x) = x^2 + kx - k$ ($k \in \mathbb{R}$) ist eine Funktionenschar gegeben mit $\mathbb{D}(f_k) = \mathbb{R}$.
   a) Zeichnen Sie $G(f_0)$, $G(f_1)$, $G(f_{-1})$ und $G(f_{-2})$ in dasselbe Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie die gemeinsamen Punkte von $G(f_k)$ mit der x-Achse. Für welche Werte von k schneidet $G(f_k)$ die x-Achse, für welche Werte berührt $G(f_k)$ die x-Achse nur?
   c) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt von $G(f_k)$ in Abhängigkeit von k.

Lösungen

1. a) $g_0(x) = \frac{1}{3}(0^2–3)\cdot(x – 0) + \frac{1}{9}(0^2 – 9) = –x – 1$; $g_3(x) = \frac{1}{3}(3^2–3)\cdot(x – 3) + \frac{1}{9}(3^2 – 9) = 2(x – 3) = 2x – 6$

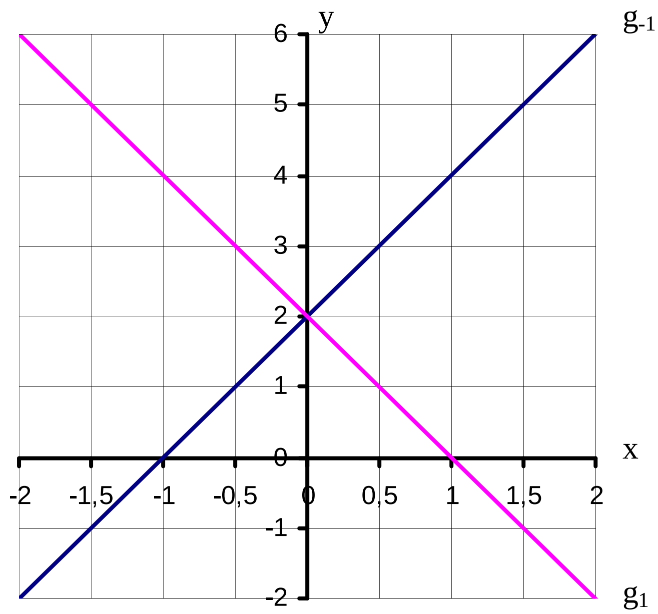


b) aus der Zeichnung: $S_{x\text{-Achse}}(3|0)$; $S_{y\text{-Achse}}(0|–6)$
oder berechnen: x-Achse: $y = g_3(x) = 0$, also $2x – 6 = 0$ ➔ $x = 3$; y-Achse: $x = 0$; $y = g_3(0) = –6$
c) $g_0(x) = g_3(x)$ ➔ $–x – 1 = 2x – 6$ ➔ $–3x = –5$ ➔ $x = 5/3$; $y = g_0(5/3) = –5/3 – 1 = –8/3$ ➔ $S(5/3|–8/3)$
d) $A = 0{,}5\ g\ h$ mit $g = 5$ (auf y-Achse), $h = 5/3$ (Abstand von S zur y-Achse) ➔ $A = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 5/3 = 25/6$

2. $g_t(x) = –2tx + t^2 + 1$
a) $b_t = t^2 + 1$

b) $y = g_t(x) = 0$ ➔ $–2tx + t^2 + 1 = 0$ ➔ $–2tx = –t^2 – 1$ ➔ $x = \frac{-t^2-1}{-2t} = \frac{t^2+1}{2t}$

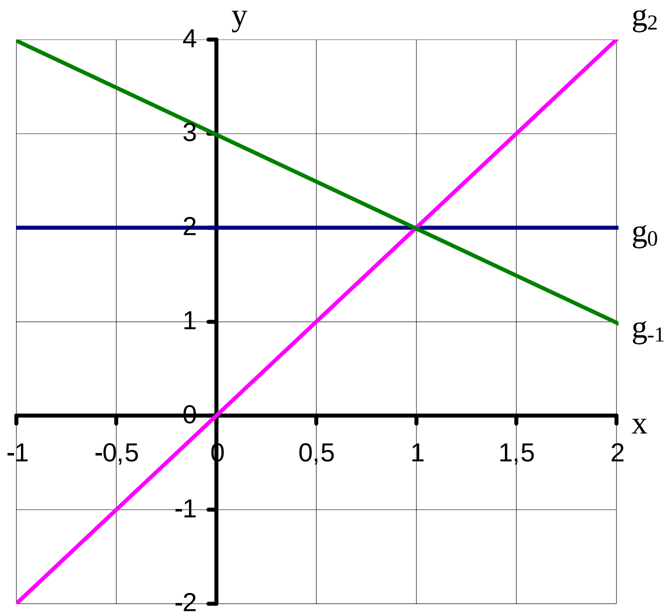
c) Schnittpunkt mit y-Achse ist P(0|5) ➔ y-Achsenabschnitt ist 5, also $t^2 + 1 = 5$ ➔ $t^2 = 4$ ➔ $t_{1,2} = \pm 2$
d) $g_{–1}(x) = 2x + 2$; $g_1(x) = –2x + 2$



e) $g_{–1}(x) = g_1(x)$ ➔ $2x + 2 = –2x + 2$ ➔ $4x = 0$ ➔ $x = 0$; $y = g_1(0) = 2$ ➔ $S(0|2)$

3. $g_m(x) = mx + 2 - m$

a) $g_0(x) = 2$; $g_2(x) = 2x$; $g_{-1}(x) = -x + 3$

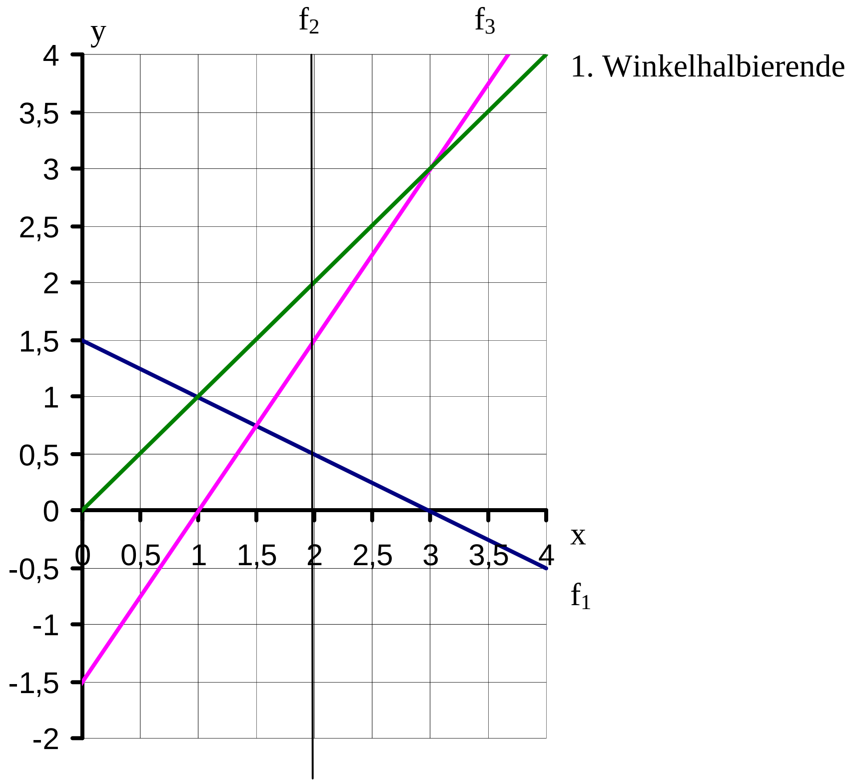


b) $g_{-2}(x) = g_1(x)$ ➔ $-2x + 4 = x + 1$ ➔ $-3x = -3$ ➔ $x = 1$; $y = g_1(1) = 2$ ➔ $S(1|2)$

c) P einsetzen: $2 = m\cdot 1 + 2 - m$, also $2 = m + 2 - m$, also $2 = 2$; wahre Aussage, unabhängig von m

oder: $g_m(1) = m\cdot 1 + 2 - m = m + 2 - m = 2$, unabhängig von m

4. a) $f_1(x) = \frac{x + 1\cdot(-3)}{2-4} = \frac{x-3}{-2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; $\quad f_2$: $x = 2$; $\quad f_3(x) = \frac{3x + 3\cdot(-1)}{2\cdot 3 - 4} = \frac{3x-3}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$



b) Nullstellen: $f_1(x) = 0$ ➔ $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ ➔ $-\frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}$ ➔ $x = 3$

$f_2(x) = 0$ geht nicht, da f_2 keine Funktion ist; $x = 2$ kann aber direkt abgelesen werden

$f_3(x) = 0$ ➔ $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ ➔ $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$ ➔ $x = 1$

Schnittpunkte mit der 1. Winkelhalbierenden (y = x):

$f_1(x) = x \Rightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=x \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{2}x \Rightarrow x = 1;\ f_1(1) = 1 \Rightarrow S_1(1|1)$

f_2: $x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S_2(2|2)$

$f_3(x) = x \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}=x \Rightarrow -\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}x \Rightarrow x = 3;\ f_3(3) = 3 \Rightarrow S_3(3|3)$

c) $A_1 = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 1 = 1{,}5$; $A_2 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$; $A_3 = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 3 = 1{,}5$ (vgl. Teil d))

d) Nullstelle: $f_t(x) = 0 \Rightarrow \frac{tx+t\cdot(t-4)}{2t-4} = 0 \Rightarrow tx + t\cdot(t-4) = 0 \Rightarrow tx = -t\cdot(t-4) \Rightarrow x = -(t-4) = 4-t$

Schnittpunkt mit der 1. Winkelhalbierenden: $f_t(x) = x \Rightarrow \frac{tx+t\cdot(t-4)}{2t-4} = x \Rightarrow tx + t\cdot(t-4) = (2t-4)\,x$

$\Rightarrow tx - (2t-4)\,x + t\cdot(t-4) = 0 \Rightarrow (-t+4)\,x = -t\cdot(t-4) \Rightarrow x = t$

$f_t(t) = = \frac{t\cdot t+t\cdot(t-4)}{2t-4} = \frac{t^2+t^2-4t}{2t-4} = \frac{2t^2-4t}{2t-4} = \frac{t\cdot(2t-4)}{2t-4} = t \Rightarrow S_t(t|t)$

Flächeninhalt Dreieck: $A = 0{,}5\ g\ h$

$g = 4 - t$ (auf x-Achse von Ursprung bis Nullstelle); $h = t$ (von x-Achse bis zum Schnittpunkt)

$\Rightarrow A(t) = 0{,}5\cdot(4-t)\cdot t = 0{,}5t\cdot(-t+4) = -0{,}5\,t^2 + 2\,t$

e) $A(t) = 0 \Rightarrow -0{,}5\,t^2 + 2\,t = 0 \Rightarrow 0{,}5t\cdot(-t+4) = 0 \Rightarrow t_1 = 0\ ;\ t_2 = 4$

für maximalen Flächeninhalt: A(t) in Scheitelform bringen

$A(t) = -0{,}5\,(t^2-4t) = -0{,}5\,(t^2-4t+2^2-2^2) = -0{,}5\,(\,(t-2)^2-4\,) = -0{,}5\,(t-2)^2+2 \Rightarrow S(2|2)$

Der Flächeninhalt wird maximal (nämlich 2) für t = 2.

5. a) Nullstellen: $f_k(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + k = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = -k \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{-k} \Rightarrow x_{1,2} = 1\pm\sqrt{-k}$

Es gibt also nur Lösungen, wenn –k positiv oder null ist (sonst kann man die Wurzel nicht ziehen!), also wenn k negativ oder null ist. Also: $k < 0$: zwei Nullstellen; $k = 0$: eine Nullstelle; $k > 0$: keine Nullstelle.

Scheitelpunkt ablesen: $S_k(1|k)$

b) Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow (x-a)^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = -2$

Aus –2 kann man keine Wurzel ziehen $\Rightarrow$ für keinen Wert von a gibt es Nullstellen.

Scheitelpunkt ablesen: $S_a(a|2)$

c) Nullstellen: $f_t(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{t}(x-1)^2+2=0 \Rightarrow \frac{1}{t}(x-1)^2 = -2 \Rightarrow (x-1)^2 = -2t \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{-2t}$

$\Rightarrow x_{1,2} = 1\pm\sqrt{-2t}$

wie in Teil a): $t < 0$: zwei Nullstellen; $t > 0$: keine Nullstelle ($t = 0$ ist hier ausgeschlossen!)

Scheitelpunkt ablesen: $S_t(1|2)$ (unabhängig von t)

6. b) gem. Punkte mit der x-Achse: $f_k(x) = 0 \Rightarrow x^2 + kx - k = 0$

$x_{1,2} = = \frac{-k\pm\sqrt{k^2-4\cdot1\cdot(-k)}}{2\cdot1} = \frac{-k\pm\sqrt{k^2+4k}}{2}$

Graph berührt x-Achse nur, wenn es nur eine Nullstelle gibt, also wenn die Diskriminante = 0 ist

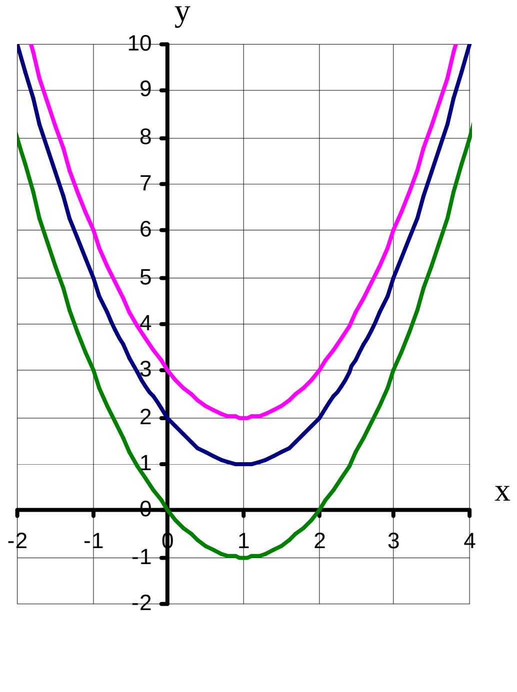
$\Rightarrow k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k\,(k+4) = 0 \Rightarrow k_1 = 0;\ k_2 = -4$

Graph schneidet die x-Achse, wenn es zwei Nullstellen gibt, also wenn die Diskriminante > 0 ist

$\Rightarrow k^2 + 4k > 0$; zugehörige Parabel skizzieren............ $k < -4$ oder $k > 0$

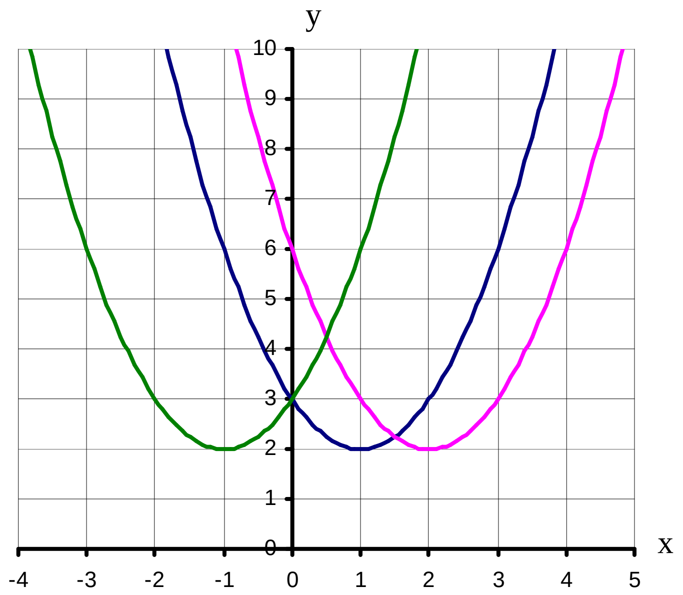
c) $f_k(x) = x^2 + kx - k = x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k = \left(x+\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} - k \Rightarrow S_k\left(-\frac{k}{2}\,\middle|\,-\frac{k^2}{4}-k\right)$

5. a)



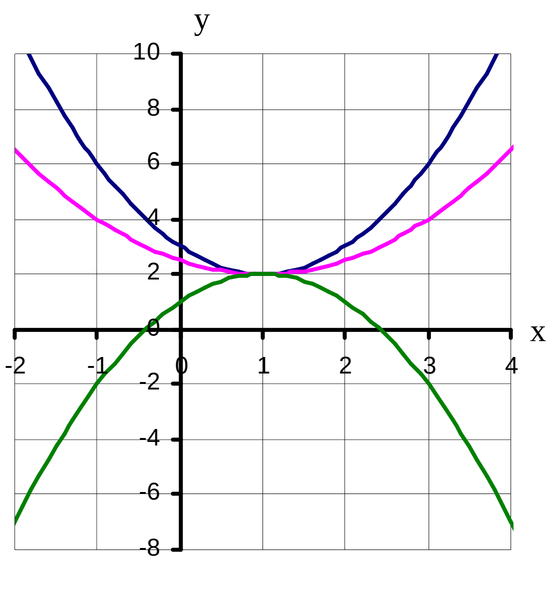
y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4

b)



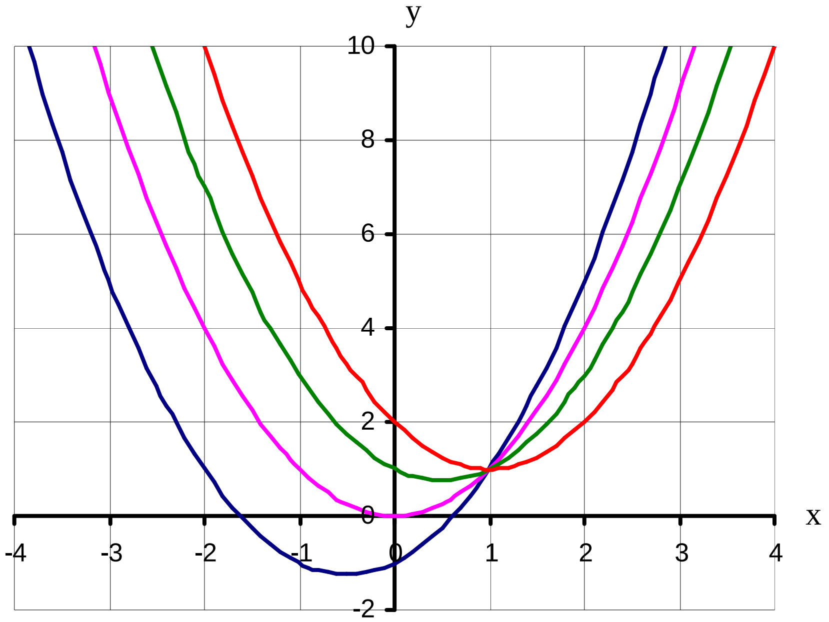
y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

c)



y
x
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-2
-1
0
1
2
3
4

6. a) mit den Ergebnissen aus Teil c): $S_0(0|0)$; $S_1(-0,5|-1,25)$; $S_{-1}(0,5|0,75)$; $S_{-2}(1|1)$; alles Normalparabeln



von links nach rechts: Graphen von f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}