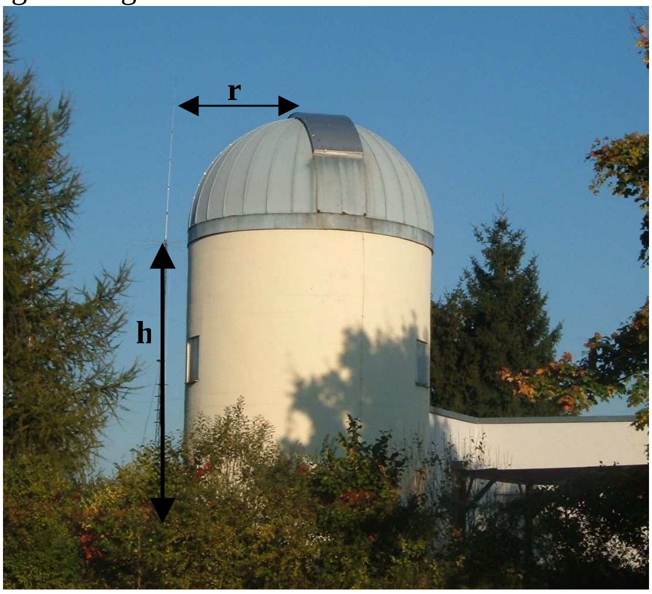
Übungen: Extremwertaufgaben

1.0 Eine Sternwarte hat meist die Form eines Zylinders (Radius r, Höhe h) mit einer oben aufgesetzten Halbkugel (siehe z. B. die im Bild unten gezeigte Fritz-Weithas-Sternwarte in Neumarkt). Die gesamte Oberfläche einer neu gebauten Sternwarte soll $S = 150\,\pi\,m^2$ betragen (warum auch immer...) Einheiten können im Folgenden ignoriert werden.

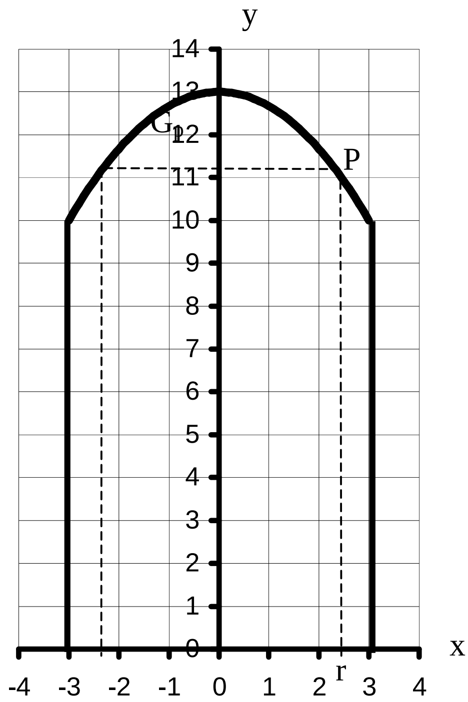


1.1 Stellen Sie das Volumen V des zylinderförmigen Unterteils als Funktion des Radius r dar.
(Ergebnis: $V(r) = \pi\,(75\,r - r^3)$)

1.2 Ermitteln Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ dieser Funktion V.

1.3 Berechnen Sie, für welche Abmessungen r und h das Volumen am größten wird, und geben Sie dieses größte Volumen an.

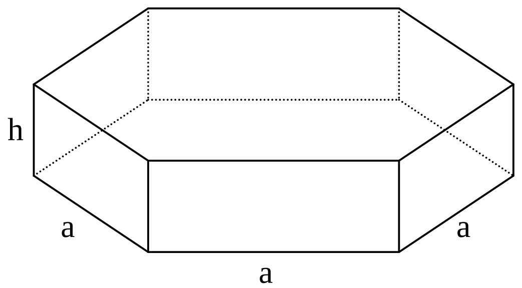
2.0 Ein alter Turm besteht aus einem Kreiszylinder und einer aufgesetzten Kuppel; sein Querschnitt ist in der Skizze unten dargestellt (dicke Striche). Der Querschnitt der Kuppel ist dabei eine Parabel, die durch die Gleichung p: $y = -\frac{1}{3}x^2 + 13$ mit $D_p = [-3;3]$ beschrieben wird. Der Turm ist baufällig und soll innen durch eine ringförmige Mauer (Radius r) und eine kreisförmige Zwischendecke (unten gestrichelt dargestellt) abgestützt werden; der Punkt P liegt dabei auf der Parabel.



2.1 Es bleibt ein zylindrischer Innenraum übrig. Ermitteln Sie dessen Volumen V in Abhängigkeit von r. Geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion V an. Einheiten können dabei ignoriert werden. (4 BE)
(mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{3}\pi\left(r^4 - 39r^2\right)$)

2.2 Ermitteln Sie r so, dass der Innenraum ein möglichst großes Volumen hat. Geben Sie dieses Volumen auch an. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (7 BE)

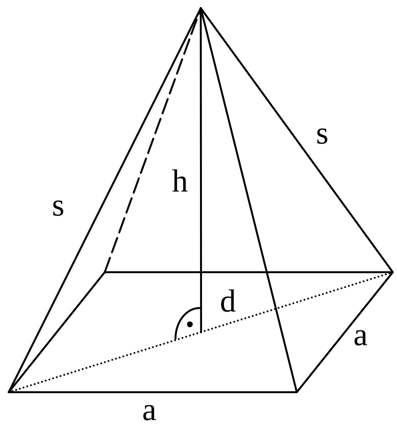
3.0 Aus Draht der Gesamtlänge 90 cm soll ein Kantenmodell eines Prismas gebastelt werden, dessen Grundseite ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge a ist (Flächeninhalt: $G = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$); siehe Skizze:



3.1 Zeigen Sie, dass sich für das Volumen V dieses Prismas in Abhängigkeit der Länge a ergibt:
$V(a) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(15a^2 - 2a^3)$, und geben Sie eine im Zusammenhang sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ an.
(Einheiten können dabei ignoriert werden)

3.2 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Abmessungen a und h das Volumen am größten ist.

4.0 Bei einer quadratischen Pyramide (siehe Skizze unten) sollen die vier Seitenkanten jeweils die Länge s = 10 cm haben (Einheiten können im Folgenden ignoriert werden).



4.1 Begründen Sie, dass für das Volumen V dieser Pyramide in Abhängigkeit von ihrer Höhe h gilt:

$$V(h) = \frac{2}{3}(100h - h^3),$$

und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge $\mathbb{D}_V$ dieser Funktion V an.
(*Tipp:* zwischen der Seitenlänge a der quadratischen Grundfläche und der Länge d der Diagonalen besteht der Zusammenhang $d = \sqrt{2} \cdot a$)

Runden Sie Ihre Ergebnisse im Folgenden auf zwei Dezimalen.

4.2 Berechnen Sie, für welche Abmessungen a und h das Volumen am größten wird, und geben Sie dieses größte Volumen an.

Lösungen

1.1
gesucht: $V_{Zylinder} = \pi r^2 h$ *(beachte: es ist nur nach dem Volumen des unteren Teils gefragt!)*
(V soll in Abhängigkeit von r dargestellt werden ➔ h muss noch berechnet werden!)
gegeben: $S = 150\pi = M_{Zylinder} + \frac{1}{2}\ O_{Kugel} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\cdot(r + h)$
*(beachte: hier verwendet man **nicht** die Formel für die Oberfläche des Zylinders, sondern nur die für die Mantelfläche, weil ja Grund- und Deckfläche des Zylinders nicht zur Oberfläche der Sternwarte gehören!)*

umstellen nach h: $\frac{75}{r} = r + h$

$$h = \frac{75}{r} - r$$

oben einsetzen: $V(a) = \pi r^2 \cdot \left(\frac{75}{r} - r\right) = \pi\,(75\,r - r^3)$

(Klammern setzen! nach dem Auflösen der Klammer: Brüche kürzen!)

1.2 $r > 0$ und $h > 0$ ➔ $\frac{75}{r} - r > 0$ ➔ $r < \sqrt{75}$ $(\approx 8{,}66)$
(beim Wurzelziehen braucht man hier nur die positive Lösung, weil ja r > 0 ist!)
also: $\mathbb{D}_V = \left]0;\sqrt{75}\right[$
*(die 0 **muss** hier ausgeschlossen werden, weil sonst h nicht definiert wäre; die $\sqrt{75}$ **sollte** wegen de Rechnung oben ausgeschlossen werden, muss aber nicht)*

1.3
$V'(r) = \pi\,(75 - 3r^2)$; $V''(r) = -6\pi r$
Stellen mit waagrechter Tangente: $V'(r) = 0$ ➔ $75 - 3r^2 = 0$ ➔ $r_1 = 5$ (m) (einfach)
(beim Wurzelziehen braucht man hier nur die positive Lösung, weil ja r > 0 ist!)
$V''(5) = -30\pi < 0$ ➔ Maximalstelle
$V(5) \approx 785\ (m^3)$
Randwerte: $V(0) = 0$; $V(\sqrt{75}) = 0$ ➔ für r = 5 (m) ist das Volumen am größten
(eigentlich müsste man hier jeweils den Limes hinschreiben, statt einfach nur einzusetzen, weil 0 und $\sqrt{75}$ ja eigentlich beide nicht zur Definitionsmenge gehören...)
h berechnen: $h = \frac{75}{5} - 5 = 10$ (m)

2.1 gesucht: $V_{Zylinder} = \pi r^2 h$ mit $h = y_P = p(r) = -\frac{1}{3}r^2 + 13$ ✓

einsetzen: $V = \pi r^2 \left(-\frac{1}{3}r^2 + 13\right)$ ✓ $= -\frac{1}{3}\pi\left(r^4 - 39r^2\right)$ ✓

$r > 0$ und $P \in G_p \Rightarrow \mathbb{D}_V =]0;3]$ ✓ *(ob man die 0 und die 3 ein- oder ausschließt, ist Geschmackssache)*

2.2 $V'(r) = -\frac{1}{3}\pi\left(4r^3 - 78r\right)$; $V''(r) = -\frac{1}{3}\pi\left(12r^2 - 78\right)$ ✓

Stellen mit waagrechter Tangente: $-\frac{1}{3}\pi\left(4r^3 - 78r\right) = 0$ ✓

$4r^3 - 78r = 0$

$4r \cdot (r^2 - 19{,}5) = 0$ ✓

$r_1 = 0 \notin \mathbb{D}_V$ ✓ oder $r^2 - 19{,}5 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{19{,}5} \approx 4{,}42 \notin \mathbb{D}_V$ ✓

(Es gibt also in der Definitionsmenge gar keine relativen Extrema! Falls man die 0 zur Definitionsmenge dazu nimmt: $V''(0) = 26\pi > 0 \Rightarrow$ Minimum!)

Randwerte: $V(0) = 0$; $V(3) = 90\pi \approx 283$ (m^3) ✓

Das größtmögliche Volumen des Innenraums erhält man also, wenn der Radius des Innenraums gleich dem des Turms ist – die Stützmauer muss also direkt an der Innenmauer hochgezogen werden. ✓

3.1

gesucht: $V_{Prisma} = G \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot h$

(V soll in Abhängigkeit von a dargestellt werden ➔ h muss noch berechnet werden!)

gegeben: $s = 90 = 12a + 6h$

(Grundfläche: 6 Seitenkanten mit Länge a; Deckfläche: 6 Seitenkanten mit Länge a; dazu 6 Kanten der Länge h dazwischen)

umstellen nach h: $90 - 12a = 6h$

$h = 15 - 2a$

oben einsetzen: $V(a) = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot (15 - 2a) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(15a^2 - 2a^3)$ *(Klammern setzen!)*

$a > 0$ und $h > 0$ ➔ $15 - 2a > 0$ ➔ $a < 7{,}5$

also: $\mathbb{D}_V =]0;7{,}5[$

(die 0 und die 7,5 ***sollten*** *wegen der Rechnung oben ausgeschlossen werden, müssen aber nicht)*

3.2

$V'(a) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(30a - 6a^2) = 9\sqrt{3}(5a - a^2)$; $V''(a) = 9\sqrt{3}(5 - 2a)$

Stellen mit waagrechter Tangente: $V'(a) = 0$ ➔ $a(5 - a) = 0$ ➔ $a_1 = 0 \notin \mathbb{D}_V$; $a_2 = 5$ (cm)

$V''(5) = 9\sqrt{3} \cdot (-5) < 0$ ➔ Maximalstelle

$V(5) \approx 325$ (cm^3)

Randwerte: $V(0) = 0$; $V(7{,}5) = 0$ ➔ für a = 5 (cm) ist das Volumen am größten

(eigentlich müsste man hier jeweils den Limes hinschreiben, statt einfach nur einzusetzen, weil 0 und 7,5 ja eigentlich beide nicht zur Definitionsmenge gehören...)

h berechnen: $h = 15 - 2 \cdot 5 = 5$ (cm)

4.1

gesucht: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$

(V soll in Abhängigkeit von h dargestellt werden ➔ a bzw. a^2 muss noch berechnet werden!)

gegeben: s = 10 ➔ $\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 = 10^2$

(Satz des Pythagoras angewendet auf das in der Skizze gezeigte rechtwinklige Dreiecke: eine Kathete ist halb so lang wie die Diagonale d, die zweite Kathete ist die Höhe h, die Hypotenuse ist s)

➔ $\left(\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\right)^2 + h^2 = 100$ *(gegebener Zusammenhang zwischen Diagonale und Seitenlänge eingesetzt)*

➔ $\frac{2a^2}{4} + h^2 = 100$ ➔ $\frac{1}{2} a^2 + h^2 = 100$ *(Klammer aufgelöst und Bruch gekürzt)*

umstellen nach a^2: $\frac{1}{2} a^2 = 100 - h^2$

$a^2 = 200 - 2h^2$

*(Hinweis: Man muss die Wurzel hier nicht ziehen, weil man ja sowieso nur a^2 braucht und nicht a. Wenn man die Wurzel aber doch zieht, dann ist das Ergebnis $a = \sqrt{200 - 2h^2}$, und das ist **nicht** dasselbe wie $a = \sqrt{200} - \sqrt{2}\,h \approx 14 - 1{,}4h$ **!!!** Hier steht eine Differenz, da kann man nicht aus den beiden Termen einzeln die Wurzel ziehen!!!)*

oben einsetzen: $V(h) = \frac{1}{3} \cdot (200 - 2h^2) \cdot h = \frac{2}{3}(100h - h^3)$ *(Klammern setzen!)*

$h > 0$ und $h < 10$ *(die Kathete muss natürlich kürzer als die Hypotenuse sein)*

also: $\mathbb{D}_V =]0;10[$

(die 0 und die 10 ***sollten*** *wegen der Rechnung oben ausgeschlossen werden, müssen aber nicht)*

4.2 $V'(h) = \frac{2}{3}(100 - 3h^2)$; $V''(h) = \frac{2}{3}(-6h) = -4h$

Stellen mit waagrechter Tangente: $V'(h) = 0$ ➔ $100 - 3h^2 = 0$ ➔ $h_1 = \sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5{,}77$ (einfach)

(beim Wurzelziehen braucht man hier nur die positive Lösung, weil ja h > 0 ist!)

$V''(5{,}77) = -4 \cdot 5{,}77 < 0$ ➔ Maximalstelle

$V(5{,}77) \approx 256{,}60$

Randwerte: $V(0) = 0$; $V(10) = 0$ ➔ für $h \approx 5{,}77$ (cm) ist das Volumen am größten, nämlich etwa 256,60 (cm^3)

(eigentlich müsste man hier jeweils den Limes hinschreiben, statt einfach nur einzusetzen, weil 0 und 10 ja eigentlich beide nicht zur Definitionsmenge gehören...)

a berechnen: $a^2 = 200 - 2 \cdot \frac{100}{3} = \frac{400}{3}$ ➔ $a \approx 11{,}55$ (cm)