Definitionslücken

im Folgenden überall: **fett** für die allgemeine Definition, *kursiv* für den Spezialfall gebrochenrationaler Funktionen

Definitionslücken:
Stellen x_0, an denen f nicht definiert ist
Nullstellen des Nenners

Pol-/Unendlichkeitsstellen:
$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$$
Nullstellen des vollständig gekürzten Nenners

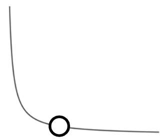
Polstellen mit VZW:
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$
oder
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$
Nullstellen des vollständig gekürzten Nenners mit ungerader Vielfachheit

oder

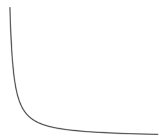
Polstellen ohne VZW:
$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = -\infty \text{ oder } \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = +\infty$$
Nullstellen des vollständig gekürzten Nenners mit gerader Vielfachheit

oder

stetig (be)hebbare Definitionslücken:
$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) \in \mathbb{R}$$
Definitionslücken von f, die keine Nullstellen des vollständig gekürzten Nenners mehr sind



stetige Fortsetzung:
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$
$\bar{f}(x)$ = gekürzter Funktionsterm



Anmerkungen:
1) Streng genommen betrachten wir hier nur sogenannte <u>isolierte</u> Definitionslücken; das sind Stellen x_0, bei denen f zwar nicht definiert ist, aber für die f für jeden Wert in der „Nachbarschaft" definiert ist, d. h. es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$, sodass sowohl $]x_0-\varepsilon; x_0[$ als auch $]x_0; x_0+\varepsilon[$ Teil der Definitionsmenge sind.
2) Außer Polstellen und SHDs gibt es auch noch andere Möglichkeiten, z. B. Stellen, bei denen die Funktion von der einen Seite her gegen eine Zahl geht, von der anderen Seite her aber gegen ∞ (z. B. $f(x) = e^{1/x}$ bei $x_0 = 0$), oder Sprungstellen (z. B. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ bei $x_0 = 0$).