Tipps zu üblichen Funktionstypen

<u>1) Gebrochenrationale Funktionen verknüpft mit Exponentialfunktionen</u> (z. B.: $f(x) = \frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$)

- Hier ist es oft praktisch, den Funktionsterm mit e^x oder e^{-x} zu erweitern oder zu kürzen. Das kann sowohl die Berechnung von Grenzwerten als auch von Ableitungen und Integralen deutlich erleichtern.
  Im Beispiel: $f(x) = \frac{2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2e^x}{e^{2x}-2e^x+1} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{2}{e^x-2+e^{-x}} = 2 \cdot (e^x - 2 + e^{-x})^{-1}$.
  Das kann man nun deutlich einfacher ableiten als den ursprünglichen Funktionsterm.
- Insbesondere für die Berechnung von Grenzwerten ist auch die Substitution $u = e^x$ sehr praktisch.
  Im Beispiel: $f(x) = \frac{2u}{(u-1)^2}$; der Zählergrad ist also 1, der Nennergrad ist 2, und damit gilt
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{2u}{(u-1)^2} = 0$.
  (Vorsicht: Bringt nichts für den Grenzwert $x \to -\infty$, denn dann folgt $u \to 0$!)

Ein Spezialfall sind hier die sogenannten logistischen Funktionen – siehe das entsprechende Blatt.

<u>2) Natürlicher Logarithmus von Potenzen, Produkten oder Brüchen</u>

- Für die Bestimmung der Definitionsmenge muss man hier darauf achten, dass der Numerus (also das, was „im Logarithmus steht‘‘) > 0 sein muss. Falls der Numerus eine ganzrationale Funktion ist, macht man das am besten mithilfe einer Skizze; falls es eine gebrochenrationale Funktion ist, ist meist eine Vorzeichentabelle sinnvoller.
- Man vereinfacht sich das Ableiten oft, indem man den Term erst mal mittels der Logarithmen-Rechenregeln auseinanderzieht. (Vorsicht: $\ln(x^n) = n \cdot \ln|x|$ für gerade Zahlen n, sonst ändert sich die Definitionsmenge!)
  Beispiel: $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) = \ln(\sqrt{x}) - \ln(x+1) = \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(x+1)$
  ➔ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{2x(x+1)} - \frac{2x}{2x(x+1)} = \frac{1-x}{2x^2+2x}$