Tipps zu üblichen Funktionstypen

<u>1) Gebrochenrationale Funktionen verknüpft mit Exponentialfunktionen</u> (z. B.: $f(x) = \frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$)

Hier ist es oft praktisch, den Funktionsterm mit e^x oder e^{-x} zu erweitern oder zu kürzen. Das kann sowohl die Berechnung von Grenzwerten als auch von Ableitungen und Integralen deutlich erleichtern. Insbesondere für die Berechnung von Grenzwerten ist auch die Substitution $u = e^x$ sehr praktisch.

Ein Spezialfall sind hier die sogenannten logistischen Funktionen. Bei diesen kann man den Funktionsterm immer in der Form $f(x) = \frac{a}{1+be^{-kx}} + c$ schreiben ($a, b, k \neq 0$, meist sind sogar alle > 0, und oft ist $c = 0$). Der Graph hat immer für $x \to -\infty$ eine waagrechte Asymptote und für $x \to +\infty$ eine andere, ist immer überall sms oder überall smf und hat immer genau einen WeP (zu dem er symmetrisch ist). Letztlich sieht der Graph immer ähnlich aus wie der von arctan.

<u>2) Wurzelfunktionen</u>

Für die Bestimmung der Definitionsmenge muss man hier darauf achten, dass der Radikand ≥ 0 sein muss.

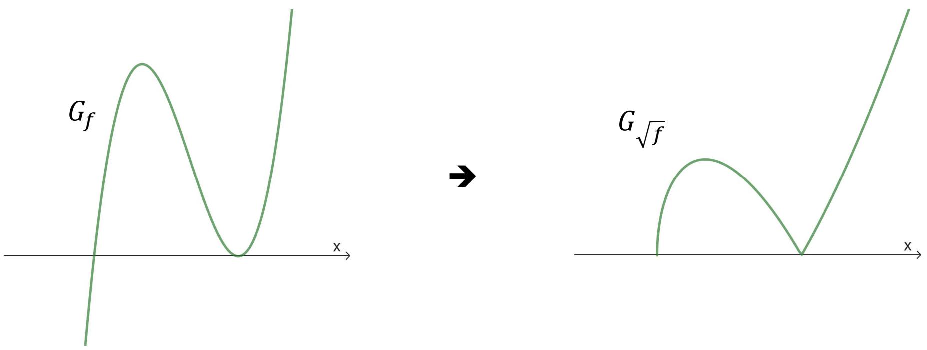
Oft ist die Funktion am Rand der Definitionsmenge nicht differenzierbar, d. h. die Definitionsmenge der Ableitungsfunktion enthält die Ränder der Definitionsmenge eben im Allgemeinen nicht. Die Ableitung geht dort gegen $+\infty$ oder $-\infty$, d. h. der Graph verläuft dort senkrecht. Dort hat man dann i. A. auch RandExP!

Beim Ableiten treten hier oft Doppelbrüche auf, die man vereinfacht, indem man den „großen‘‘ Bruch mit dem Nenner des „kleinen‘‘ Bruchs erweitert.

Beispiel: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ➔ $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1)-\sqrt{x}\cdot 1}{(x+1)^2}$; hier erweitert man mit $2\sqrt{x}$, also:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1)-\sqrt{x}\cdot 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1)\cdot 2\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{(x+1)^2\cdot 2\sqrt{x}} = \frac{(x+1)-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

Wurzelziehen macht aus einem einfachen Nullpunkt einen Rand-Tiefpunkt auf der x-Achse mit senkrechter Steigung, aus einem doppelten Nullpunkt einen Berührpunkt mit der x-Achse mit Knick im Graphen:



<u>3) Natürlicher Logarithmus von Potenzen, Produkten oder Brüchen</u>

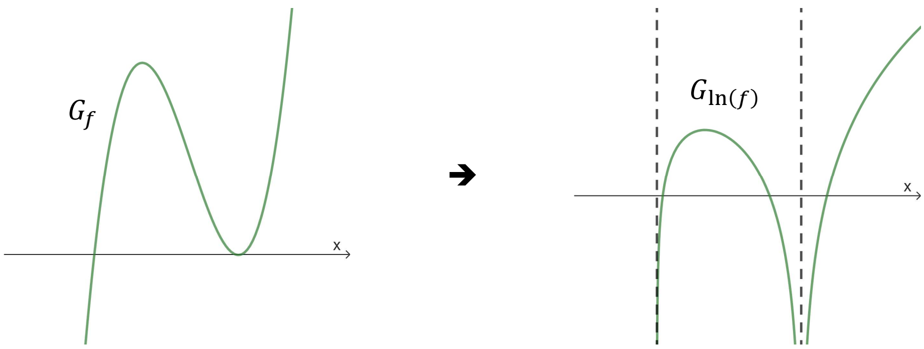
Für die Bestimmung der Definitionsmenge muss man hier darauf achten, dass der Numerus > 0 sein muss.

Man vereinfacht sich das Ableiten oft, indem man den Term erst mal mittels der Logarithmen-Rechenregeln auseinanderzieht. (Vorsicht: $\ln(x^n) = n \cdot \ln|x|$ für gerade Zahlen n, sonst ändert sich D_f!)

Beispiel: $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) = \ln(\sqrt{x}) - \ln(x+1) = \frac{1}{2}\ln(x) - \ln(x+1)$

➔ $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{2x(x+1)} - \frac{2x}{2x(x+1)} = \frac{1-x}{2x^2+2x}$

Logarithmieren macht aus Nullstellen jeweils Polstellen:



4) <u>arctan von gebrochenrationalen Funktionen</u>

Die maximale Definitionsmenge von arctan(f) ist kein Problem, die ist einfach identisch mit der von f. Auch bei den Nullstellen und ihren Vielfachheiten, den Extremstellen und der Monotonie ändert sich nichts. Man muss aber beim Grenzverhalten aufpassen: Aus Stellen, bei denen f gegen $\pm\infty$ geht, werden Stellen, bei denen arctan(f) gegen $\pm\frac{\pi}{2}$ geht.

Aus der inneren Ableitung (Nachdifferenzieren) der gebrochenrationalen Funktion erhält man hier mittels Quotientenregel immer ein Quadrat eines Terms im Nenner, den man mit dem Nenner, der durch Ableiten des arctan selbst entsteht, zusammenfassen kann. Beispiel: $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

➔ $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{1\cdot(x-1)^2+\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\cdot(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}$

$= \frac{-2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{-2}{2x^2+2} = -\frac{1}{x^2+1}$

Eine häufige Aufgabenstellung ist hier: „Zeigen Sie, dass die Funktionen f und g übereinstimmen / sich nur um eine Konstante unterscheiden.'' Dafür zeigt man zunächst, dass die Ableitungen gleich sind; daraus folgert man dann, dass f(x) = g(x) + C ist. Diese Konstante bestimmt man schließlich, indem man einen x-Wert einsetzt oder einen Grenzwert betrachtet. (Vorsicht: Wenn die Definitionsmenge nicht ganz ℝ ist, muss man jedes Intervall einzeln betrachten!) Beispiel: Zeigen Sie, dass die Funktionen f und g mit $f(x) = \arctan(x)$, $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ für x > 0 übereinstimmen, sich aber für x < 0 überall um genau den Wert π unterscheiden.

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $\quad g'(x) = 0 - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}$

➔ $f'(x) = g'(x)$ ➔ $f(x) = g(x) + C$

x > 0: z. B. $f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$; $g(1) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ ➔ $f(x) = g(x)$

x < 0: z. B. $f(-1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $g(1) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$ ➔ $g(x) = f(x) + \pi$

(alternativ könnte man sich hier auch die Grenzwerte für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ anschauen)