Beweis:
Die Graphen kubischer Funktionen sind symmetrisch zu ihrem Wendepunkt

kubische Funktion: $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a \neq 0$
==> Ableitungen: $f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$; $f''(x) = 6\,a\,x + 2b$

Flachstellen: $6\,a\,x + 2b = 0$ ==> $x_W = -\frac{b}{3a}$ einfach ==> VZW von f '' ==> Wendestelle

$$y_W = f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\,\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\,\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\,\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \ldots = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

$$\Rightarrow \text{WeP}\left(-\frac{b}{3a}\,\middle|\,\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$$

Nun verschieben wir den Graph von f so, dass der Wendepunkt sich danach im Ursprung befindet, d. h. wir definieren

$$g(x) = f(x + x_W) - y_W$$

alles einsetzen:

$$\begin{aligned}
g(x) &= f\left(x - \frac{b}{3a}\right) - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\,\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\,\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,\left(x^3 - \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\,\left(x^2 - \frac{2b}{3a}x + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\,\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,x^3 - bx^2 + \frac{b^2}{9a}x - \frac{b^3}{27a^2} + bx^2 - \frac{2b^2}{3a}x + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{bc}{3a} + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,x^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x
\end{aligned}$$

Der Funktionsterm von g hat nur ungerade Exponenten, also ist der Graph von g symmetrisch zum Ursprung. Deshalb ist der Graph von f symmetrisch zu seinem Wendepunkt.

Anmerkung: Man kann sich ausrechnen, dass $-\frac{b^2}{3a} + c$ die Steigung m_W des Graphen in seinem Wendepunkt ist. Deshalb kann man jede kubische Funktion letztlich auch schreiben als

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = a\,(x - x_W)^3 + m_W\,(x - x_W) + y_W.$$

Das ist völlig analog zur Scheitelpunktsform bei quadratischen Funktionen (wenn auch „etwas‘‘ komplizierter). Man könnte es als „Wendepunktform kubischer Funktionen‘‘ bezeichnen. Habe ich so aber bisher noch nirgends gesehen… Diese Form kann man dann als Ausgangspunkt nehmen, um eine allgemeine Lösungsformel für kubische Gleichungen herzuleiten, analog zur Mitternachtsformel für quadratische Gleichungen, für deren Herleitung man die Scheitelpunktsform verwendet. Für Details siehe FOS 11 Analysis, Kapitel II, „ Die Cardanischen Formeln zum Lösen von Gleichungen dritten Grades‘‘.