Beweis:
Die Graphen kubischer Funktionen sind symmetrisch zu ihrem Wendepunkt

kubische Funktion: $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ mit $a \neq 0$
==> Ableitungen: $f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$; $f''(x) = 6\,a\,x + 2b$

Flachstellen: $6\,a\,x + 2b = 0$ ==> $x_W = -\frac{b}{3a}$ einfach ==> VZW von f '' ==> Wendestelle

$$y_W = f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\,\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\,\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\,\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \ldots = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$$

$$\Rightarrow \text{WeP}\left(-\frac{b}{3a} \middle| \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)$$

Nun verschieben wir den Graph von f so, dass der Wendepunkt sich danach im Ursprung befindet, d. h. wir definieren

$$g(x) = f(x + x_W) - y_W$$

alles einsetzen:

$$\begin{aligned}
g(x) &= f\left(x - \frac{b}{3a}\right) - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\,\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\,\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,\left(x^3 - \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\,\left(x^2 - \frac{2b}{3a}x + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\,\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,x^3 - bx^2 + \frac{b^2}{9a}x - \frac{b^3}{27a^2} + bx^2 - \frac{2b^2}{3a}x + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{bc}{3a} + d - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d \\
&= a\,x^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x
\end{aligned}$$

Der Funktionsterm von g hat nur ungerade Exponenten, also ist der Graph von g symmetrisch zum Ursprung. Deshalb ist der Graph von f symmetrisch zu seinem Wendepunkt.

Anmerkungen: Man kann sich ausrechnen, dass $-\frac{b^2}{3a} + c$ die Steigung m_W des Graphen in seinem Wendepunkt ist. Deshalb kann man jede kubische Funktion letztlich auch schreiben als

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = a\,(x - x_W)^3 + m_W\,(x - x_W) + y_W.$$

Das ist völlig analog zur Scheitelpunktsform bei quadratischen Funktionen (wenn auch „etwas" komplizierter). Man könnte es als „Wendepunktform kubischer Funktionen" bezeichnen. Habe ich so aber bisher noch nirgends gesehen…

Diese Form kann man dann als Ausgangspunkt nehmen, um eine allgemeine Lösungsformel für kubische Gleichungen herzuleiten, analog zur Mitternachtsformel für quadratische Gleichungen, für deren Herleitung man die Scheitelpunktsform verwendet. Für Details siehe FOS 11 Analysis, Kapitel II, „ Die Cardanischen Formeln zum Lösen von Gleichungen dritten Grades".

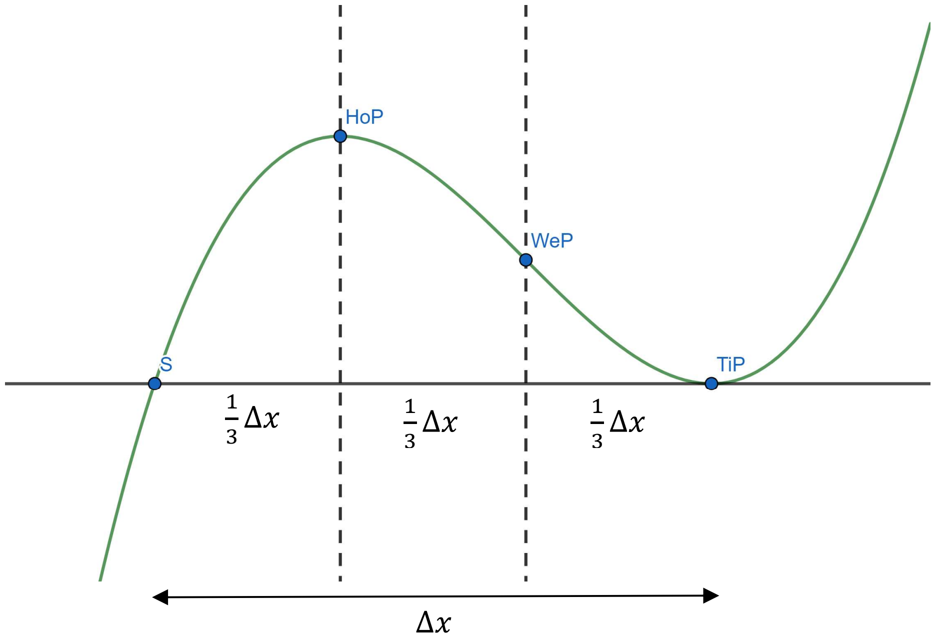
Und übrigens kann man die Werte von a und m_W (und damit den Funktionsterm!) auch recht einfach aus dem Graphen der Funktion bestimmen, falls man die Koordinaten des Wendepunkts und eines Extrempunktes $ExP(x_E|y_E)$ einfach ablesen kann: Als Abkürzungen definiert man $\Delta x = x_E - x_W$, $\Delta y = y_E - y_W$. Dann gilt (sehr ähnlich wie bei der Formel für a bei quadratischen Funktionen und bei der Formel für m bei linearen Funktionen):

$$a = -\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{(\Delta x)^3}, \quad m_W = \frac{3}{2}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Falls der Graph dagegen einen Terrassenpunkt hat, wird es sogar noch einfacher: Man kann sich einen beliebigen Punkt $P(x_P|y_P)$ auf dem Graphen aussuchen und hat dann mit $\Delta x = x_P - x_W$, $\Delta y = y_P - y_W$:

$$a = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^3}, \quad m_W = 0.$$

Und man kann noch mehr zeigen über die allgemeine Gestalt des Graphen einer kubischen Funktion – vorausgesetzt, er hat zwei Extrempunkte: Wenn man die Tangente in einem der Extrempunkte einzeichnet, dann wird die Strecke von diesem Extrempunkt zum Schnittpunkt dieser Tangente mit dem Graphen jeweils gedrittelt von der Wendestelle und der zweiten Extremstelle (siehe Skizze unten).



Da es hier um Verhältnisse von Streckenlängen geht und solche Verhältnisse sich nicht ändern, wenn man einen Graphen verschiebt, streckt/staucht bzw. spiegelt, genügt es, den Beweis für einen besonders einfachen Graphen zu führen – da man jeden anderen Graphen einer kubischen Funktion eben erhält, indem man diesen Graphen verschiebt, streckt/staucht bzw. spiegelt, gilt die Aussage damit dann automatisch für alle kubischen Funktionen. Wir betrachten hier die kubische Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2$; dann ist $f'(x) = 3x^2 + 6x, f''(x) = 6x + 6$, und für die beiden Extremstellen und die Wendestelle erhält man dann schnell $x_{E1} = 0, x_{E2} = -2$ und $x_W = -1$. Außerdem hat man sofort auch $y_{E1} = 0$, und damit hat die Tangente im ersten Extrempunkt einfach die Gleichung $y = 0$, ist also die x-Achse. Die Schnittstelle dieser Tangente mit dem Graphen ist damit gleich der einfachen Nullstelle von f, also $x_N = -3$. Damit ist die Behauptung schon gezeigt: Die Strecke vom ersten Extrempunkt zum Schnittpunkt erstreckt sich von $x = -3$ bis $x = 0$, der zweite Extrempunkt liegt bei $x = -2$ und der Wendepunkt bei $x = -1$; also wird die Strecke vom Schnittpunkt zum ersten Extrempunkt tatsächlich vom zweiten Extrempunkt und vom Wendepunkt jeweils gedrittelt.