Symmetrie bei gebrochenrationalen Funktionen

Ist f eine gebrochenrationale Funktion, dann gilt:

- Der Graph von f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn die Definitionsmenge von f symmetrisch zu 0 ist und nach vollständigem Kürzen sowohl Zähler als auch Nenner jeweils eine gerade Funktion ist.
- Der Graph von f ist genau dann symmetrisch zum Ursprung, wenn die Definitionsmenge von f symmetrisch zu 0 ist und nach vollständigem Kürzen der Zähler eine gerade und der Nenner eine ungerade Funktion, oder umgekehrt.
- Ansonsten gibt es keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

Beweis: Wenn schon die Definitionsmenge nicht symmetrisch zu 0 ist, dann kann der Graph der Funktion sicher nicht symmetrisch zum Koordinatensystem sein. Ab jetzt setzen wir die Symmetrie der Definitionsmenge also voraus.

Wir betrachten dann eine gebrochenrationale Funktion, deren Funktionsterm bereits vollständig gekürzt wurde und dann geschrieben wird als $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Da der Funktionsterm vollständig gekürzt ist, haben g und h keine Nullstellen gemeinsam.

Sei nun der Graph symmetrisch zur y-Achse; dafür muss gelten: $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$.

Ausführlich gilt also $\frac{g(-x)}{h(-x)} = \frac{g(x)}{h(x)}$, und durch Umstellen folgt $g(-x)h(x) = g(x)h(-x)$. (*)

Sei nun $x_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eine Nullstelle von g. Eingesetzt in (*) folgt: $g(-x_1)h(x_1) = g(x_1)h(-x_1) = 0$.

Da nach Voraussetzung x_1 keine Nullstelle von h ist, folgt $g(-x_1) = 0$. Deshalb kann man g schreiben als

$$g(x) = (x - x_1)(x + x_1)g_1(x) = (x^2 - x_1^2)g_1(x),$$

wobei g_1 und h keine Nullstelle gemeinsam haben. Eingesetzt in (*) ergibt sich

$$((-x)^2 - x_1^2)g_1(-x)h(x) = (x^2 - x_1^2)g(x)h(-x) \rightarrow g_1(-x)h(x) = g_1(x)h(-x)$$

Nun kann man mit einer Nullstelle (ungleich Null) von g_1 weitermachen usw. Irgendwann landet man bei einer Funktion g_k, die höchstens noch die Nullstelle 0 haben kann; diese kann man also schreiben als $g_k(x) = a\,x^n$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Auch für diese Funktion ergibt sich wieder eine Gleichung analog zu (*), also: $a\,(-x)^n h(x) = a\,x^n h(-x)$. Es folgt $h(-x) = (-1)^n h(x)$. Dies setzen wir wieder in (*) ein,

$$g(-x)h(x) = g(x)(-1)^n h(x),$$

also folgt auch $g(-x) = (-1)^n g(x)$.

Insgesamt ergibt sich also: g, h müssen entweder beide gerade sein (wenn n eine gerade Zahl ist) oder beide ungerade sein (wenn n ungerade ist). Dass beide ungerade sind, ist aber nicht möglich ist, denn dann hätten beide die Nullstelle 0, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Völlig analog zeigt man: Graph symmetrisch zum Ursprung ➔ g gerade und h ungerade, oder umgekehrt

(Beachte: Die Folgerung gilt nicht, wenn f nicht vollständig gekürzt ist, also wenn g, h noch Nullstellen gemeinsam haben! Bsp: $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{x+1}{x^3+x^2-x-1}$*; Zähler und Nenner sind beide weder gerade noch ungerade, aber trotzdem ist f gerade! Wenn f noch nicht vollständig gekürzt ist, muss aber trotzdem (schon) gelten, dass die Definitionsmenge symmetrisch zu 0 ist.)*

Damit ist die eine Richtung des Beweises erledigt. Die umgekehrte Richtung ist aber sehr einfach zu beweisen: Wenn $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist, wobei der Funktionsterm schon vollständig gekürzt wurde, und g, h beide gerade sind, folgt sofort, dass $f(-x) = \frac{g(-x)}{h(-x)} = \frac{g(x)}{h(x)} = f(x)$ ist, also ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse. Zum ursprünglichen Funktionsterm (vor dem Kürzen) kommt man durch Erweitern. Dadurch ändert sich aber die Form des Funktionsgraphen nicht, es können höchstens stetig behebbare Definitionslücken dazu kommen. Diese müssen aber auf beiden Seiten symmetrisch dazu kommen – denn sonst wäre die Definitionsmenge von f ja nicht symmetrisch zu 0. Damit ändert sich durch das Erweitern des Funktionsterms die Symmetrie des Graphen nicht.

Völlig analog zeigt man auch: g gerade und h ungerade, oder umgekehrt ➔ Graph symmetrisch zum Ursprung.