Symmetrie bei zusammengesetzten Funktionen

$f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)}$ mit g, h ganzrational; $D_f = \mathbb{R}$

Wenn f gerade oder ungerade ist, also $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$, folgt $|f(-x)| = |f(x)|$, also

$$|g(-x) \cdot e^{h(-x)}| = |g(x) \cdot e^{h(x)}|$$

Dies kann man umstellen zu

$$\left|\frac{g(-x)}{g(x)}\right| = e^{h(x)-h(-x)}$$

Für $x \to \pm\infty$ geht die linke Seite gegen 1. (Zähler und Nenner haben denselben Grad, und der LK kann sich höchstens im VZ unterscheiden.) Falls h nicht gerade wäre (also entweder ungerade wäre oder der Graph von h keine Symmetrie zum Koordinatensystem hätte), wäre $h(x) - h(-x)$ eine ganzrationale Funktion ungleich der Nullfunktion, also würde die rechte Seite gegen 0 oder gegen ∞ gehen. Damit hätte man einen Widerspruch.

Also muss h gerade sein, und damit ergibt sich $f(-x) = g(-x) \cdot e^{h(x)}$. Wenn f gerade bzw. ungerade ist, folgt daraus sofort $g(-x) = g(x)$ bzw. $g(-x) = -g(x)$, also g gerade bzw. ungerade. Umgedreht gilt natürlich auch: Wenn h gerade ist und g gerade bzw. ungerade, dann ist auch f gerade bzw. ungerade.

Somit folgt insgesamt: f ist genau dann gerade bzw. ungerade, wenn g gerade bzw. ungerade ist und zusätzlich h gerade ist.

Dies kann man durch entsprechendes Verschieben des Graphen leicht verallgemeinern zu:

1) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)} + y_0$ ist genau dann symmetrisch zur Achse $x = x_0$, wenn die Graphen von g und h beide symmetrisch zu dieser Achse sind.
2) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)} + y_0$ ist genau dann symmetrisch zum Punkt $(x_0|y_0)$, wenn der Graph von g symmetrisch zum Punkt $(x_0|0)$ ist und der Graph von h symmetrisch zur Achse $x = x_0$ ist.