Das Summenzeichen

Summen schreibt man oft mit dem <u>Summenzeichen</u> Σ („Sigma“):

$$\sum_{i=j}^{k} T(i) = \mathrm{T(j) + T(j+1) + ... + T(k)}$$

i heißt dabei der <u>Summationsindex</u> (es können auch andere Variablen verwendet werden). Für diesen werden im Term T(i) nacheinander die ganzen Zahlen von j bis k (mit k ≥ j) eingesetzt und dann die Werte addiert.
Beispiele:

1) $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ und $\sum_{i=2}^{6} i = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

2) $\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ und $\sum_{k=5}^{7} \frac{1}{k} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

3) $\sum_{i=10}^{12} B(20;\, 0{,}3;\, i) = \mathrm{B}(20;\, 0{,}3;\, 10) + \mathrm{B}(20;\, 0{,}3;\, 11) + \mathrm{B}(20;\, 0{,}3;\, 12)$

4) $(-3)^2 + (-2)^2 + ... + 4^2 + 5^2 = \sum_{i=-3}^{5} i^2$

Aufgaben:
1. Schreiben Sie die Summen ausführlich:

a) $\sum_{i=2}^{5} i^3$ b) $\sum_{j=-2}^{2} |\, j\,|$ c) $\sum_{k=0}^{3} \sqrt{9-k^2}$ d) $\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!}$

2. Schreiben Sie folgende Summen kurz mithilfe eines Summenzeichens:
   a) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{20}$
   b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$
   c) B(100; 0,1; 7) + B(100; 0,1; 8) + … + B(100; 0,1; 13)

Summen von j bis k kann man immer umschreiben als die Differenz zweier Summen, die bei 0 anfangen, z. B.:

$$\sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - (0^2 + 1^2) = \sum_{i=0}^{5} i^2 - \sum_{i=0}^{1} i^2$$

allgemein gilt also: $\sum_{i=j}^{k} T(i) = \sum_{i=0}^{k} T(i) - \sum_{i=0}^{j-1} T(i)$

Aufgabe:
3. Schreiben Sie die Summen als Differenzen von zwei Summen, die bei 0 anfangen.

a) $\sum_{n=5}^{10} \frac{1}{n!}$ b) $\sum_{k=10}^{55} \frac{1}{k+1}$ c) $\sum_{i=7}^{13} \mathrm{B}(100;\, 0{,}1;\, i)$

Lösungen:

1. a) = $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ (= 224) b) = |–2| + |–1| + |0| + |1| + |2| (= 6)

c) = $\sqrt{9-0^2} + \sqrt{9-1^2} + \sqrt{9-2^2} + \sqrt{9-3^2}$ (= $3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$)

d) = $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ (= $2\frac{17}{24}$)

2. a) = $\sum_{i=0}^{20} 2^i$ b) = $\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$ c) = $\sum_{i=7}^{13} B(100; 0{,}1; i)$

3. a) = $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!}$ b) = $\sum_{k=0}^{55} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k+1}$ c) = $\sum_{i=0}^{13} B(100; 0{,}1; i) - \sum_{i=0}^{6} B(100; 0{,}1; i)$