Substitutionsverfahren: Verallgemeinerungen

Allgemein führt bei jeder Gleichung der Form

$$a \cdot (T(x))^2 + b \cdot T(x) + c = 0$$

mit einem beliebigen Term T(x) und Konstanten a, b, c die Substitution

$$u = T(x)$$

auf die quadratische Gleichung

$$a\,u^2 + b\,u + c = 0.$$

Beispiele:

1) $2x^6 - 4x^3 + 5 = 0$

u = führt auf $2u^2 - 4u + 5 = 0$

2) $(x^3 - 1)^2 + 2\,(x^3 - 1) + 4 = 0$

u = führt auf $u^2 + 2u + 4 = 0$

3) $x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$

u = führt auf $u^2 - 2u - 1 = 0$

4) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

u = führt auf $u^2 - 3u + 2 = 0$

5) $(\sin(x))^2 - 0{,}5 \cdot \sin(x) + 1 = 0$

u = führt auf $u^2 - 0{,}5u + 1 = 0$

Noch allgemeiner gilt : Das Substitutionsverfahren ist immer dann hilfreich, wenn man eine Gleichung der Form f(x) = 0 hat, wobei f eine Verkettung aus einer einfacheren Funktion g(x) und einem möglichst einfachen Term T(x) ist.

Lösungen:

1) $u = x^3$
2) $u = x^3 - 1$
3) $u = \sqrt{x}$
4) $u = 2^x$
5) $u = \sin(x)$