Die Stirling-Formel – eine Näherung für die Fakultät für große n

Zunächst kann man mittels n-maliger partieller Integration zeigen, dass

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

gilt. Wenn wir das Integral näherungsweise berechnen, so erhalten wir also eine Näherung für die Fakultät.

Für große Werte von n nimmt der Integrand sehr große Werte an; deshalb ist es sinnvoll, den Logarithmus des Integranden zu betrachten, also

$$f(x) = \ln(x^n e^{-x}) = n \ln(x) - x$$

Diese Funktion nähern wir nun an. Es wird sich zeigen, dass sie für jedes n ein Maximum hat; deshalb ist es sinnvoll, sie durch eine (nach unten geöffnete) Parabel anzunähern:

$$f(x) \approx f(x_{max}) + \frac{1}{2} f''(x_{max}) \cdot (x - x_{max})^2$$

(Vgl. die Tangentenformel; der Faktor $\frac{1}{2}f''(x_{max})$ stellt sicher, dass auf beiden Seiten die zweiten Ableitungen gleich sind). Wir benötigen also die Stelle mit waagrechter Tangente, den Wert der zweiten Ableitung dort und den Funktionswert dort.

Die Ableitungen sind offensichtlich $f'(x) = \frac{n}{x} - 1$ und $f''(x) = -\frac{n}{x^2}$.

Aus der Bedingung $f'(x) = 0$ erhalten wir also sofort die Stelle $x_{max} = n$ und daraus wiederum

$f''(n) = -\frac{1}{n} < 0$ (also ist dort tatsächlich ein Maximum) und $f(n) = \ln n^n e^{-n} = \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Damit ist

$$f(x) = \ln(x^n e^{-x}) \approx \ln \left(\frac{n}{e}\right)^n - \frac{1}{2n} \cdot (x-n)^2,$$

und das Integral ist

$$n! = \int_0^\infty e^{f(x)} dx \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}\cdot(x-n)^2} dx.$$

Die Substitution $u = \frac{x-n}{\sqrt{n}}$ ergibt dann

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Da wir n als groß annehmen und die Gauß'sche Glockenkurve sehr schnell abfällt, können wir die untere Integrationsgrenze durch $-\infty$ annähern:

$$\text{n!} \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Das Integral ergibt aber genau $\sqrt{2\pi}$ (siehe ,,Das uneigentliche Integral über die Gauß'sche Glockenkurve" in Analysis, Kapitel II), sodass wir insgesamt die Näherung

$$\text{n!} \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

haben.

Benannt ist diese Formel übrigens nach dem schottischen Mathematiker James Stirling (1692-1770), nicht nach dem Erfinder des Stirling-Motors, dem britischen Ingenieur Robert Stirling, (1790-1878).